Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Erste Woche, 9.4.2014

Ein grundlegendes Werkzeug der Mathematik ist die *axiomatische Methode*. Hierbei geht es — grob gesagt — darum, durch logische Schlußfolgerungen neue mathematische Aussagen zu gewinnen. Hierbei gibt es zwei Arten von Aussagen:

- **Axiome** sind Aussagen, die von vornherein als gegeben und als wahr angenommen werden. Axiome werden benutzt, um mathematische Strukturen, die man untersuchen möchte, festzulegen.
- **Abgeleitete Aussagen**, die aus den Axiomen durch logische Schlußfolgerungen gewonnen werden.

Im Laufe der Vorlesung werden wir viele Beispiele für Axiome kennenlernen. Heute wollen wir lediglich einige Aspekte der Konstruktion logischer Aussagen informell einführen.

Aussagen

Eine *mathematische Aussage* ist eine Aussage über einen mathematischen Gegenstand, der entweder *wahr* oder *falsch* sein kann.

Beispiele:

1. Jede gerade Zahl ist die Summe zweier ungerader Zahlen.
2. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
3. Jede gerade Zahl größer zwei ist Summe zweier Primzahlen.
4. Zu jedem Kreis läßt sich mit Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt hat.
5. Für $n > 2$ besitzt die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine Lösung mit positiven ganzen Zahlen x, y, z.

Welche der obigen Aussagen sind wahr?

Konjunktion

Es seien A und B beliebige Aussagen, dann ist "A und B" (kurz: A $\wedge$ B) ebenfalls eine Aussage. Dabei ist A $\wedge$ B genau dann eine wahre Aussage, wenn sowohl A als auch B wahre Aussagen sind.

Beispiele: Die Konjunktion der ersten beiden Aussagen weiter oben lautet:

Jede gerade Zahl ist die Summe zweier ungerader Zahlen *und* es gibt unendlich viele Primzahlen.

Da beide Aussagen dieser Konjunktion wahr sind, ist die Konjunktion als Ganzes ebenfalls wahr. Folgende Konjunktion ist eine falsche Aussage:

Jede gerade Zahl ist die Summe zweier ungerader Zahlen *und* $1 + 1 = 3$.

Disjunktion

Es seien A und B beliebige Aussagen, dann ist "A oder B" (kurz: A $\vee$ B) ebenfalls eine Aussage. Dabei ist A $\vee$ B genau dann eine wahre Aussage, wenn mindestens eine der Aussagen A, B wahr ist.

Beispiele: Folgende Disjunktionen sind wahr:

Jede gerade Zahl ist die Summe zweier ungerader Zahlen *oder* es gibt unendlich viele Primzahlen.

Jede gerade Zahl ist die Summe zweier ungerader Zahlen *oder* $1 + 1 = 3$.

Hingegen ist folgende Disjunktion falsch, da beide Teilaussagen falsch sind:

Zu jedem Kreis läßt sich mit Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt hat *oder* $1 + 1 = 3$.

Negation

Die Negation $\neg$ A kehrt den Wahrheitswert einer Aussage A um.

Beispiel: $\neg(1 + 1 = 3)$ ist äquivalent zu $1 + 1 \neq 3$, was offensichtlich eine wahre Aussage ist.

Bemerkung: Es gilt: $\neg\neg A = A$.

Implikation

Die Implikation ist das wichtigste logische Werkzeug. Sie wird geschrieben als A $\Rightarrow$ B, was wir lesen als:

- A impliziert B,
- aus A folgt B, bzw. B folgt aus A,
- Wenn A gilt, dann gilt B,
- A ist *hinreichend* für B,
- B ist *notwendig* für A.

Hierbei wird A oft als *Prämisse* oder *Voraussetzung* bezeichnet und B als *Konsequenz* oder *Folgerung*.

Beispiel: Wir betrachten folgende beiden Aussagen, die wir als Axiome auffassen wollen:

Es seien x und y reelle Zahlen.
Wenn gilt $x > 0$ und $y > 0$, oder $x < 0$ und $y < 0$, dann gilt $x \cdot y > 0$.

Kurzschreibweise[1]:

$$\begin{aligned}&x, y \in \mathbb{R},\\ &((x > 0) \wedge (y > 0)) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0)) \Rightarrow x \cdot y > 0.\end{aligned}$$

Ein wichtiger Punkt hierbei ist, daß die Richtigkeit einer Implikation an sich *nicht* von der Richtigkeit der Prämisse abhängt. In diesem Beispiel können wir die Wahrheit der Prämisse nicht bestätigen, da wir nichts näheres über x und y wissen. Spaßeshalber variieren wir nun das erste Axiom:

1. Es seien x und y positive reelle Zahlen.
2. Es sei $x = 3$ und $y = 5$.
3. Es seien x, y reelle Zahlen mit $x > 0$ und $y < 0$.

In den ersten beiden Fällen erfüllen x und y die Prämisse. Wir können also die Implikation anwenden und leiten in beiden Fällen ab, daß

$$x \cdot y > 0$$

eine wahre Aussage ist. Im Fall 3 erfüllen x und y nicht die Prämisse, und wir können somit die Implikation nicht anwenden. Wir erhalten somit keine neue wahre Aussage.

Das Beispiel zeigt, daß wir zwischen der Wahrheit (oder besser: der Korrektheit) einer Implikation und ihrer Anwendung unterscheiden müssen. Folgende Implikation ist nicht korrekt und kann daher niemals angewendet werden:

$$((x > 0) \wedge (y > 0)) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0)) \Rightarrow x \cdot y < 0.$$

Äquivalenz

Wenn gilt A $\Rightarrow$ B und B $\Rightarrow$ A, dann sind beide Aussagen *äquivalent*, oder kurz: A $\Leftrightarrow$ B. Es gibt folgende Sprechweisen:

- aus A folgt B und aus B folgt A,
- A ist *hinreichend und notwendig* für B,
- A *genau dann, wenn* B, bzw. B *genau dann, wenn A*,
- A ist äquivalent zu B, bzw. A ist gleichbedeutend mit B.

[1] Man sieht, daß exzessive Kurzschreibung nicht unbedingt die Verständlichkeit verbessert.

Beispiel: Folgende Implikation ist wahr:

$$x \cdot y > 0 \Rightarrow ((x > 0) \wedge (y > 0)) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0)).$$

Zusammen mit der umgekehrten Implikation von weiter oben erhalten wir also eine Äquivalenz:

$$((x > 0) \wedge (y > 0)) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0)) \Leftrightarrow x \cdot y > 0.$$

In Worten:

Es seien x und y reelle Zahlen.
Dann $x > 0$ und $y > 0$, oder $x < 0$ und $y < 0$ genau dann, wenn $x \cdot y > 0$.

Sätze und Beweise

Eine neue wahre Aussage wird oft als *Satz* bezeichnet (wichtige Sätze heißen oft auch *Theoreme*). Ihre Herleitung mit Hilfe von Implikationen heißt *Beweis*.

Beispiel: Wir nehmen an, daß folgende Axiome vorliegen:

Es seien x und y positive reelle Zahlen.
Wenn gilt $x > 0$ und $y > 0$, oder $x < 0$ und $y < 0$, dann gilt $x \cdot y > 0$.

Dann können wir obige Argumente in einen Satz umformulieren:

Satz: *Es gilt:* $x \cdot y > 0$.

Beweis. Unser erstes Axiom sagt, daß die Aussage $(x > 0) \wedge (y > 0)$ wahr ist. Somit ist die Prämisse des zweiten Axioms, $((x > 0) \wedge (y > 0)) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0))$, ebenfalls erfüllt und wir können somit die Implikation anwenden, die besagt, daß $x \cdot y > 0$. □

Literatur-/Lesevorschläge

A. Beutelspacher, *Lineare Algebra*, §1.6
A. Beutelspacher, *Das ist o.B.d.A. trival*, Vieweg, 2009
`http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_(Mathematik)`
`http://en.wikipedia.org/wiki/Theorem`

Hinweis: Diese Literaturvorschläge sind nur zur Anregung gedacht und sollten nicht als Pflichtlekture aufgefaßt werden.