Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2021

Lineare Algebra II – Restaufgaben

Hier sind noch ein paar Aufgaben, die ich übrig hatte (zum üben). Die Schwierigkeit muss nicht den Klausuraufgaben entsprechen. Außerdem können noch Tippfehler drin sein.

Aufgabe 1:

Existiert eine Bilinearformen β auf $\mathbb{R}^2$, so dass $\beta(\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}) = x \cdot y$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$? Und wenn ja: Ist β eindeutig oder existieren mehrere Bilinearformen mit dieser Eigenschaft?

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^3$ (bezüglich des Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$).

Aufgabe 3:

Sei $B \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Ist $\{A \in K^{n\times n} \mid AB = BA\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(K)$?

Aufgabe 4:

Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3$ UVR, so dass $U_1 \cap U_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$. Welche Kombinationen von $\dim U_1, \dim U_2$ sind möglich?

Aufgabe 5:

Gibt es einen nicht-trivialen Vektorraum V und UVR U_1, U_2, U_3, die paarweise Komplemente voneinander sind?

Aufgabe 6:

Wahr oder falsch: Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und U ein UVR, so existiert ein I, so dass $\langle v_i \mid i \in I\rangle$ ein Komplement von U ist.

Aufgabe 7:

Sei V endl-dim $\mathbb{R}$-VR und U ein UVR. ist $U^\perp$ ein Komplement von U?

Aufgabe 8:

Rechne nach, dass $\mathbb{R}^3$ die universelle Eigenschaft der direkten Summe $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ erfüllt.

Aufgabe 9:

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ so, dass $f^2 = f$ gilt. Zeigen Sie: V isomorph zu $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

Aufgabe 10:

Sei $V = U_1 \oplus U_2$, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ so, dass U_i f-invar ist. Sei $f_i = f|_{U_i}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) f ist nilpotent gdw f_1 und f_2 beide nilpotent sind

(b) Falls f, f_1, f_2 nilpotent sind: Der Nilplotenzgrad von f ist gleich der Summe der Nilpotenzgrade von f_1 und von f_2

(c) Falls f, f_1, f_2 nilpotent sind: Der Nilplotenzgrad von f ist gleich dem Maximum der Nilpotenzgrade von f_1 und von f_2

(d) Die Menge der EW von f ist genau die Vereinigung der Mengen der EW von f_1 und f_2

(e) Ist λ EW von f, so ist λ sowohl EW von f_1 als auch EW von f_2

(f) Ist λ_i EW von f_i, so ist $\lambda_1 + \lambda_2$ EW von f.

Aufgabe 11:

Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5)$ ein Endomorphismus mit $\dim(\mathrm{im}(f)) = 3$ und $\dim(\ker(f^2)) = 2$. Kann f nilpotent sein?

Aufgabe 12:

Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^6)$ ein nilpotenter Endomorphismus mit $\operatorname{rk} f = 3$ und $\operatorname{rk} f^2 = 2$. Welchen Nilpotenzgrad kann ein solcher Endomorphismus haben?

Aufgabe 13:

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform J_A der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14:

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) Sind U, U' f-invariante UVR, so ist auch $U \cap U'$ f-invariant.

(b) Sind U, U' f-invariante UVR, so ist auch $U + U'$ f-invariant.

(c) Ist f nilpotent und $p(x)$ ein Polynom ohne konstanten Term, so ist auch $p(f)$ nilpotent.

Aufgabe 15:

Seien f_i Endomorphismen von V_i mit Minimalpolynom μ_i für $i = 1, 2$. Sei μ das Minimalpolynom von $f_1 \oplus f_2$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\mu = \mu_1 + \mu_2$

(b) $\mu = \mu_1 \cdot \mu_2$

(c) μ ist ein Teiler von $\mu_1 \cdot \mu_2$.

Aufgabe 16:

Ist jede nicht-invertierbare Matrix nilpotent?

Aufgabe 17:

Sei K ein Körper, und seien $A, N \in K^{n \times n}$ Matrizen, so dass A invertierbar ist, N nilpotent, und so dass $AN = NA$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $A + N$ invertierbar ist.

Hinweis: Bestimmen Sie $(A + N) \cdot \sum_{i=0}^{r} (-NA^{-1})^i$.

Aufgabe 18:

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Matrizen, die die gleichen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ haben und so dass für $i = 1, \ldots, r$ folgendes gilt:

$$\dim \mathrm{Hau}_{\lambda_i} A = \dim \mathrm{Hau}_{\lambda_i} B \leq 2$$

$$\dim \mathrm{Eig}_{\lambda_i} A = \dim \mathrm{Eig}_{\lambda_i} B$$

Zeigen Sie, dass A und B ähnlich sind.

Aufgabe 19:

Für $U_i \subseteq V$ UVR sei $U_i^0 := \{\alpha \in V^* \mid \alpha(U_i) = 0\}$.

(a) Zeigen Sie: $(U_1 \cap U_2)^0 \supseteq U_1^0 + U_2^0$. Gilt stets Gleichheit?

(b) Zeigen Sie: $U_1 \subseteq U_2$ gdw $U_1^0 \supseteq U_2^0$.

Aufgabe 20:

Sei L ein Körper, der K enthält. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$ nilpotent, so ist auch die Sklarerweiterung f_L nilpotent.

(b) Ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, so ist $(f^*)_L = (f_L)^*$

Aufgabe 21:

Existiert eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$? Und wenn ja: Ist f eindeutig oder existieren mehrere lineare Abbildungen mit dieser Eigenschaft?

Aufgabe 22:

Ist $\{u \otimes v \mid u \in U, v \in V\}$ ein UVR von $U \otimes V$?

Aufgabe 23:

Sei $f_i \colon V_i \to W_i$ für $i = 1, 2$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Sind f_1, f_2 beide injektiv, so ist auch $f_1 \otimes f_2$ injektiv.

(b) Sind f_1, f_2 beide surjektiv, so ist auch $f_1 \otimes f_2$ surjektiv.

(c) Sind f_1, f_2 beide nilpotent, so ist auch $f_1 \otimes f_2$ nilpotent.

(d) Ist λ_i ein EW von f_i (für $i = 1, 2$), so ist $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ ein EW von $f_1 \otimes f_2$.

Aufgabe 24:

Sei K ein Körper und seien A, B K-Algebren. Ist die Menge der Algebren-Homomorphismen von A nach B ein Untervektorraum der Menge der linearen Abbildungen von A nach B? (Zur Erinnerung: Damit eine lineare Abbildung f ein Algebren-Homomorphismus ist, muss gelten: $f(a \cdot a') = f(a) \cdot f(a')$ und $f(1) = 1$.)

Aufgabe 25:

Zeigen Sie: Die Menge der nilpotenten Matrizen bildet ein Ideal in der Algebra $K^{n \times n}$.

Aufgabe 26:

Zeigen Sie: Sind $v_1, \ldots, v_8$ beliebige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, so sind die vier Vektoren $v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4, v_5 \wedge v_6, v_7 \wedge v_8$ in $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ linear abhängig.