Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2021

Probeklausur Lineare Algebra II

Diese Probeklausur sollte vom Umfang und von der Art der Aufgaben etwa den eigentlichen Klausuren entsprechen. Wir haben uns zwar auch bemüht, die Probeklausur ähnlich schwer wie die eigentlichen Klausuren zu machen, aber es kann leicht passieren, dass man sich da verschätzt; ich kann also nichts garantieren.

Aufgabe 1:

Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \rangle = 2x_1x_2 + y_1y_2$$

als euklischen Vektorraum. Bestimmen Sie bezüglich des obigen Skalarproduktes (nicht das Standardskalarprodukt) die adjungierte Abbildung f^* zur Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Matrizen $A \in K^{7\times 7}$ mit Minimalpolynom $\mu_A(x) = x^3$, welche paarweise nicht ähnlich sind.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie A^{2021}, wobei $A = SJ_AS^{-1}$ mit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4:

Sei V ein Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und setze $W^0 := \{\alpha \in V^* \mid \forall w \in W\colon \alpha(w) = 0\}$. Wir bezeichnen die kanonische Abbildung von V nach V/W mit kan.

Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus $f\colon (V/W)^* \to W^0$ existiert, sodass $\alpha(\mathrm{kan}(v)) = (f(\alpha))(v)$ für alle $\alpha \in (V/W)^*$ und alle $v \in V$ gilt.

Aufgabe 5:

Zeigen oder widerlegen Sie, dass falls V und W K-Vektorräume über einem Körper K sind und $f\colon V \times V \to W$ eine bilineare Abbildung ist, die Abbildung $v \mapsto f(v, v)$ linear ist.

Aufgabe 6:

Existiert eine lineare Abbildung $f\colon V \otimes V^* \to V \oplus K$ mit $f(v \otimes \alpha) = (v, \alpha(v))$ für alle $v \in V$ und $\alpha \in V^*$?

Aufgabe 7:

Existiert ein Homomorphismus $f\colon S(\mathbb{R}^2) \to T(\mathbb{R}^2)$ von $\mathbb{R}$-Algebren mit $f|_{\mathbb{R}^2} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$?

Aufgabe 8:

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $v, v' \in V$. Rechnen Sie nach, dass $(v + v') \wedge (v - v') = 2v' \wedge v$ gilt.