**Aufgabe 1 (2 Punkte):**

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Wir schreiben $f^*$ für die assoziierte adjungierte Abbildung. Zeigen Sie, dass $f + f^*$ selbstadjungiert ist, also dass $(f + f^*)^* = f + f^*$ gilt.

**Aufgabe 2 (3 Punkte):**

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ zwei Matrizen mit Minimalpolynomen $\mu_A(x) = x^2(x-1)^3 = \mu_B(x)$ und charakteristischen Polynomen $\chi_A(x) = x^4(x-1)^4 = \chi_B(x)$. Sind $A$ und $B$ dann notwendigerweise ähnlich?

**Aufgabe 3 (3 Punkte):**

Bestimmen die die Jordan-Normalform $J_A$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4 (3 Punkte):**

Sei $K$ ein Körper, $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir setzen

$$W^0 := \{\alpha \in V^* \mid \forall w \in W \colon \alpha(w) = 0\} \subseteq V^*.$$

Zeigen Sie, dass $(W^0)^0 = W$ gilt.

Hierbei identifizieren wir wie üblich $V$ mit $V^{**}$, indem $v \in V$ mit $\eta \in V^{**}$ identifiziert wird, wenn für alle $\alpha \in V^*$ gilt: $\alpha(v) = \eta(\alpha)$.

**Aufgabe 5 (2 Punkte):**

Seien $V$ und $W$ $\mathbb{R}$-Vektorräume und $f\colon V \times V \to W$ eine Abbildung, die sowohl linear als auch bilinear ist. Zeigen Sie, dass $f$ die Null-Abbildung sein muss, also dass $f(v, v') = 0$ für alle $v, v' \in V$ gilt.

**Aufgabe 6 (3 Punkte):**

Sei $K$ ein Körper und sei $V$ ein Vektorraum über $K$. Existiert stets eine lineare Abbildung

$$f\colon V^* \otimes V^* \to V^*$$

mit $f(\alpha \otimes \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v)$ für alle $v \in V$ und $\alpha, \beta \in V^*$?

**Aufgabe 7 (3 Punkte):**

Existiert ein Homomorphismus $f\colon T(\mathbb{R}^2) \to T(\mathbb{R}^2)$ von $\mathbb{R}$-Algebren mit $f(e_1) = e_1 \otimes e_1$ und $f(e_2) = e_2 \otimes e_2$?

**Aufgabe 8 (2 Punkte):**

Drücken Sie $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ in der Basis $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$ aus.