Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2021

Probeklausur Lineare Algebra II

Diese Probeklausur sollte vom Umfang und von der Art der Aufgaben etwa den eigentlichen Klausuren entsprechen. Wir haben uns zwar auch bemüht, die Probeklausur ähnlich schwer wie die eigentlichen Klausuren zu machen, aber es kann leicht passieren, dass man sich da verschätzt; ich kann also nichts garantieren.

Aufgabe 1:

Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \rangle = 2x_1x_2 + y_1y_2$$

als euklischen Vektorraum. Bestimmen Sie bezüglich des obigen Skalarproduktes (nicht das Standardskalarprodukt) die adjungierte Abbildung f^* zur Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Wir müssen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ finden, sodass

$$\langle \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} v, v' \rangle = \langle v, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} v' \rangle$$

für alle $v, v' \in \mathbb{R}^2$ gilt. Schreibe $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Dann muss also

$$\begin{aligned} 4xx' + 8yx' + 6xy' + 8yy' &= (4x + 8y)x' + (6x + 8y)y' = \langle \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ 6x + 8y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ax' + by' \\ cx' + dy' \end{pmatrix} \rangle \\ &= 2x(ax' + by') + y(cx' + dy') \\ &= 2axx' + 2bxy' + cyx' + dyy' \end{aligned}$$

für alle $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ gelten. Wählen wir $a = 2$, $b = 3$, $c = d = 8$, so ist dies offenbar erfüllt. Somit ist die Adjungierte f^* durch Multiplikation mit der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ gegeben.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Matrizen $A \in K^{7\times 7}$ mit Minimalpolynom $\mu_A(x) = x^3$, welche paarweise nicht ähnlich sind.

Da zwei Matrizen genau dann ähnlich sind, wenn ihre Jordan-Normalformen übereinstimmen, bestimmen wir alle Jordan-Normalformen für Matrizen $A \in K^{7\times 7}$ mit $\mu_A(x) = x^3$.

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $0 = \mu_A(A) = A^3$, sodass A nilpotent ist. Zudem wissen wir, dass der größte in der Jordan-Normalform auftretende Block ein (3×3)-Block ist, da der Nilpotenzgrad von A durch 3 gegeben ist ($\mu_A(x) = x^3$ ist Minimalpolynom).

Somit ergeben sich folgende potentielle Jordan-Normalformen:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} & \\ & & (0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & (0) & \\ & & & (0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} & & & & \\ & (0) & & & \\ & & (0) & & \\ & & & (0) & \\ & & & & (0) \end{pmatrix}$$

$7 = 3+3+1$ $\qquad$ $7 = 3+2+2$ $\qquad$ $7 = 3+2+1+1$ $\qquad$ $7 = 3+1+1+1+1$

Die maximale Anzahl von paarweise nicht ähnlichen Matrizen in $K^{7\times 7}$ mit Minimalpolynom x^3 ist also 4.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie A^{2021}, wobei $A = SJ_AS^{-1}$ mit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A^{2021} = (SJ_AS^{-1})^{2021} = SJ_A^{2021}S^{-1} = S\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} & \\ & (-1) \end{pmatrix}^{2021} S^{-1}$$

$$= S\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}^{2021} & \\ & (-1)^{2021} \end{pmatrix} S^{-1}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

per Induktion nach n:

I.A.: klar für $n = 0, 1$

I.S.: $n \to n+1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

$\overset{\text{I.V.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

auch ok ohne formale Begründung

$$= S\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ & 1 \end{pmatrix} & \\ & (-1) \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2021 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 2021 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2021 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2021 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4:

Sei V ein Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und setze $W^0 := \{\alpha \in V^* \mid \forall w \in W \colon \alpha(w) = 0\}$. Wir bezeichnen die kanonische Abbildung von V nach V/W mit kan.

Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus $f \colon (V/W)^* \to W^0$ existiert, sodass $\alpha(\mathrm{kan}(v)) = (f(\alpha))(v)$ für alle $\alpha \in (V/W)^*$ und alle $v \in V$ gilt.

Nach der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes V/W haben wir eine Bijektion

$$(V/W)^* = \mathrm{Hom}(V/W, K) \xrightarrow[\alpha \mapsto \alpha \circ \mathrm{kan}]{f} \underbrace{\{\tilde{\alpha} \in \underbrace{\mathrm{Hom}(V,K)}_{= V^*} \mid W \subseteq \ker(\tilde{\alpha})\}}$$

$$= \{\tilde{\alpha} \in V^* \mid \tilde{\alpha}(w) = 0 \text{ für alle } w \in W\}$$

$$= W^0.$$

Es gilt also $f(\alpha)(v) = (\alpha \circ \mathrm{kan})(v) = \alpha(\mathrm{kan}(v))$. Wir müssen somit nur noch zeigen, dass f linear ist. Seien dazu $\alpha, \alpha' \in (V/W)^*$ und $\lambda \in K$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\lambda\alpha + \alpha')(v) &= (\lambda\alpha + \alpha') \circ \mathrm{kan}(v) = \lambda(\alpha \circ \mathrm{kan})(v) + \alpha' \circ \mathrm{kan}(v) \\ &= \lambda f(\alpha)(v) + f(\alpha')(v) \end{aligned}$$

für alle $v \in V$, sodass f linear ist.

Aufgabe 5:

Zeigen oder widerlegen Sie, dass falls V und W K-Vektorräume über einem Körper K sind und $f\colon V \times V \to W$ eine bilineare Abbildung ist, die Abbildung $v \mapsto f(v, v)$ linear ist.

Die Aussage stimmt nicht. Betrachte dazu die Multiplikation $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$ als bilineare Abbildung. Dann ist die Abbildung $x \overset{\psi}{\mapsto} f(x,x) = x^2$ nicht linear.

z.B. $2 \cdot 1 \overset{\psi}{\mapsto} f(2 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (2 \cdot 1)^2$

$$= 4$$
$$\neq 2 \cdot 1$$
$$= 2 \cdot \psi(1)$$

Aufgabe 6:

Existiert eine lineare Abbildung $f\colon V \otimes V^* \to V \oplus K$ mit $f(v \otimes \alpha) = (v, \alpha(v))$ für alle $v \in V$ und $\alpha \in V^*$?

Nein, betrachte z.B. $V = \mathbb{R}^2$, $v = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2)^*$. Gäbe es ein solches f, so müsste

$$f((2v) \otimes \alpha) = \left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right)$$

$$\shortparallel$$

$$f(2(v \otimes \alpha))$$

$$\shortparallel$$

$$f(v \otimes (2\alpha)) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right)$$

gelten, aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 7:

Existiert ein Homomorphismus $f\colon S(\mathbb{R}^2) \to T(\mathbb{R}^2)$ von $\mathbb{R}$-Algebren mit $f|_{\mathbb{R}^2} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$?

Nein, denn dann würde

$$f(v \cdot v') = f(v) \cdot f(v') = id_{\mathbb{R}^2}(v) \cdot id_{\mathbb{R}^2}(v') = v \cdot v'$$

$v \cdot v' = v' \cdot v$ $\|$ in $S(\mathbb{R}^2)$

$$f(v' \cdot v) = f(v') \cdot f(v) = id_{\mathbb{R}^2}(v') \cdot id_{\mathbb{R}^2}(v) = v' \cdot v$$

für alle $v, v' \in \mathbb{R}^2$ gelten. Für $v = e_1$ und $v' = e_2$ gilt aber $e_1 \cdot e_2 \neq e_2 \cdot e_1$ in $T(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8:

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $v, v' \in V$. Rechnen Sie nach, dass $(v+v') \wedge (v-v') = 2v' \wedge v$ gilt.

Es gilt

$$(v+v') \wedge (v-v') = \underbrace{(v \wedge v)}_{=0} + \underbrace{(v \wedge (-v'))}_{\substack{= -(v \wedge v') \\ = v' \wedge v}} + (v' \wedge v) + \underbrace{(v' \wedge (-v'))}_{= -\underbrace{(v' \wedge v')}_{=0}} = 2v' \wedge v.$$