Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2021
30.09.2021

Schriftliche Prüfung zu Lineare Algebra II

(PO 2014 / 2016: Zweite Klausur / PO 2008: Nachklausur)

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

Als Hilfsmittel sind zwei beidseitig selbst handbeschriebene DIN-A4-Blätter erlaubt. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Taschenrechner, Telefone oder Bücher sind nicht gestattet.

Schreiben Sie bitte leserlich und verwenden Sie keinen Bleistift. Wenn Sie Nebenrechnungen machen, die nicht korrigiert werden sollen, machen Sie dies bitte kenntlich (z. B. indem Sie sie durchstreichen).

Wenn der Platz für die Lösung einer Aufgabe nicht ausreicht, können Sie auf der Rückseite und auf dem leeren Papier am Ende des Klausurbogens weiterschreiben; machen Sie dann deutlich, was zu welcher Aufgabe gehört. (Sie können die Rückseiten und das leere Papier natürlich auch als Schmierpapier verwenden.)

Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig.

Alle Antworten sind zu begründen (wenn nicht anders angegeben). Sie dürfen bei Begründungen und Beweisen Resultate aus der Vorlesung verwenden (wenn nicht anders angegeben).

Füllen Sie dieses Deckblatt erst auf Aufforderung aus.
Lassen Sie die Klausur bis dahin geschlossen liegen.

Wenn Sie zum Ausfüllen aufgefordert werden: Schreiben Sie bitte DEUTLICH LESBAR in Druckbuchstaben.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikel-Nr: ____________ Studienfach: ____________________ Fachsemester: ______

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

☐ die Zulassung im SS 21 erworben habe

☐ (für Mathematiker inkl. Finanzmathematik:) an einer schriftlichen Prüfung zu lineare Algebra II bei

______________ im WS / SS ______ teilgenommen, aber nicht bestanden habe.

☐ (für andere Fächer:) die Zulassung zur Prüfung im WS / SS ______ erworben habe.

____
Unterschrift

Hiermit bestätige ich, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

____
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Wir schreiben f^* für die assoziierte adjungierte Abbildung. Zeigen Sie, dass $f + f^*$ selbstadjungiert ist, also dass $(f + f^*)^* = f + f^*$ gilt.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle (f+f^*)(v), v' \rangle &\underset{+}{\overset{\text{Def}}{=}} \langle f(v) + f^*(v), v' \rangle \overset{\text{Bil.}}{=} \langle f(v), v' \rangle + \langle f^*(v), v' \rangle \\
&\underset{(\,)^*}{\overset{\text{Def}}{=}} \langle v, f^*(v') \rangle + \langle v, \underbrace{(f^*)^*}_{=f}(v') \rangle \\
&\overset{\text{Komm.}}{=} \langle v, f(v') \rangle + \langle v, f^*(v') \rangle \\
&\overset{\text{Bil.}}{=} \langle v, f(v') + f^*(v') \rangle \\
&\underset{+}{\overset{\text{Def}}{=}} \langle v, (f + f^*)(v') \rangle
\end{aligned}$$

für alle $v, v' \in V$ und somit $(f+f^*)^* = f + f^*$.

Aufgabe 2 (3 Punkte):
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ zwei Matrizen mit Minimalpolynomen $\mu_A(x) = x^2(x-1)^3 = \mu_B(x)$ und charakteristischen Polynomen $\chi_A(x) = x^4(x-1)^4 = \chi_B(x)$. Sind A und B dann notwendigerweise ähnlich?

Nein. Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^{8\times 8}$. Da A und B jeweils mit ihren Jordan-Normalformen übereinstimmen, können wir die charakteristischen Polynome und Minimalpolynome direkt ablesen:

Die charakteristischen Polynome ergeben sich durch die Diagonalelemente als Nullstellen der Linearfaktoren, sodass

$\chi_A(x) = x^4 (x-1)^4 = \chi_B(x)$.

Die Minimalpolynome ergeben sich ebenfalls so aus den Diagonalelementen mit dem Unterschied, dass die Potenzen der Linearfaktoren jeweils durch die Größe des größten Jordan-Blockes zum gegebenen Eigenwert (= Diagonalelement) gegeben sind. Also

$\mu_A(x) = x^2 (x-1)^3 = \mu_B(x)$.

Somit erfüllen A und B die gewünschten Bedingungen. Allerdings sind A und B nicht ähnlich, da A zwei (2×2)-Jordan-Blöcke zum Eigenwert 0 besitzt und B nicht (ähnlich genau dann, wenn Jordan-Normalformen bis auf Reihenfolge der Jordan-Blöcke gleich sind).

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Bestimmen die die Jordan-Normalform J_A der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\chi_A(x) \overset{\text{obere}}{\underset{\substack{\text{Dreiecks-}\\ \text{matrix}}}{=}} (x-1)^2(x-2),$$

kennen wir bereits die Eigenwerte von A und somit die Diagonalelemente der Jordan-Normalform J_A von A. Nun gilt

$$(A-1)(A-2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ & * & \\ & & \end{pmatrix} \neq 0,$$

sodass wir, da A kein Vielfaches der Einheitsmatrix ist $(\deg(\mu_A) \neq 1)$ und jeder Eigenwert eine Nullstelle des Minimalpolynoms ist, $\mu_A(x) = \chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ erhalten. Somit

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

da die Potenzen der Linearfaktoren im Minimalpolynom die Größe des größten Jordan-Blockes zu einem Eigenwert angeben.

Aufgabe 4 (3 Punkte):
Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir setzen

$$W^0 := \{\alpha \in V^* \mid \forall w \in W : \alpha(w) = 0\} \subseteq V^*.$$

Zeigen Sie, dass $(W^0)^0 = W$ gilt.

Hierbei identifizieren wir wie üblich V mit V^{**}, indem $v \in V$ mit $\eta \in V^{**}$ identifiziert wird, wenn für alle $\alpha \in V^*$ gilt: $\alpha(v) = \eta(\alpha)$.

Vermöge der Identifikation $V = V^{**}$ entspricht ein Element $w \in W$ dem Element $\eta_w \in V^{**}$ mit $\eta_w(\alpha) = \alpha(w)$ für alle $\alpha \in V^*$. Sei nun $\eta_w \in W$. Wir zeigen zunächst, dass

$$\eta_w \in (W^0)^0 = \{\eta \in V^{**} \mid \{\alpha \in V^* \mid W \subset \ker(\alpha)\} \subset \ker(\eta)\}.$$

Sei dafür $\alpha \in V^*$ mit $W \subset \ker(\alpha)$. Dann gilt

$\eta_w(\alpha) \overset{\text{Def } \eta_w}{=} \alpha(w) \overset{W \subset \ker \alpha}{=} 0$

und somit $\eta_w \in (W^0)^0$. Also gilt $W \subset (W^0)^0$. Mit der Formel

$$\dim(W^0) \overset{(*)}{=} \dim(V) - \dim(W)$$

aus Übungsblatt 9 Aufgabe 4 erhalten wir zudem

$$\dim(W) \overset{(*)}{=} \dim(V) - \dim(W^0) \overset{(*)}{=} \dim(V) - (\underbrace{\dim(V^*)}_{\overset{\text{endl-dim}}{=} \dim(V)} - \dim((W^0)^0))$$

$$= \dim((W^0)^0),$$

sodass $W \subset (W^0)^0$ mit $\dim(W) = \dim((W^0)^0)$, also $W = (W^0)^0$.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume und $f\colon V \times V \to W$ eine Abbildung, die sowohl linear als auch bilinear ist. Zeigen Sie, dass f die Null-Abbildung sein muss, also dass $f(v, v') = 0$ für alle $v, v' \in V$ gilt.

Seien $v, v' \in V$. Es gilt

$$4f(v,v') \overset{\text{Bil.}}{=} f(2v, 2v') = f(2(v,v')) \overset{\text{Lin.}}{=} 2f(v,v')$$

und somit $2f(v,v') = 0$. Durch Multiplikation mit $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ erhalten wir $f(v,v') = 0$, sodass f die Nullabbildung ist

Aufgabe 6 (3 Punkte):
Sei K ein Körper und sei V ein Vektorraum über K. Existiert stets eine lineare Abbildung

$$f\colon V^* \otimes V^* \to V^*$$

mit $f(\alpha \otimes \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v)$ für alle $v \in V$ und $\alpha, \beta \in V^*$?

Nein. Betrachte $V = \mathbb{R}^2$ und $\alpha = (1\ 0)$, $\beta = (0\ 1) \in (\mathbb{R}^2)^*$. Gäbe es eine solche lineare Abbildung f, so erhielten wir

$$\begin{aligned} 2 = (2\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (0\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f((2\ 0) \otimes (0\ 1))\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= f(2((1\ 0) \otimes (0\ 1)))\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= f((1\ 0) \otimes (0\ 2))\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= (1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (0\ 2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= 1 \ \lightning \end{aligned}$$

Also kann es ein solches f nicht geben.

Aufgabe 7 (3 Punkte):

Existiert ein Homomorphismus $f\colon T(\mathbb{R}^2) \to T(\mathbb{R}^2)$ von $\mathbb{R}$-Algebren mit $f(e_1) = e_1 \otimes e_1$ und $f(e_2) = e_2 \otimes e_2$?

Ja. Wir definieren eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\tilde{f}} T(\mathbb{R}^2)$ vermöge

$$e_1 \mapsto e_1 \otimes e_1 \quad \text{und} \quad e_2 \mapsto e_2 \otimes e_2$$

auf der Basis $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$. Nach der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra $T(\mathbb{R}^2)$ lässt sich $\tilde{f}$ eindeutig zu einem Homomorphismus $f: T(\mathbb{R}^2) \to T(\mathbb{R}^2)$ von $\mathbb{R}$-Algebren fortsetzen, d.h. f ist ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren mit $f(v) = \tilde{f}(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere gelten

$f(e_1) = \tilde{f}(e_1) = e_1 \otimes e_1$

und

$f(e_2) = \tilde{f}(e_2) = e_2 \otimes e_2.$

Aufgabe 8 (2 Punkte):

Drücken Sie $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ in der Basis $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$ aus.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = (2e_2 + 3e_3) \wedge (2e_1 + e_3) &= 2e_2 \wedge 2e_1 + 2e_2 \wedge e_3 \\
&\quad + 3e_3 \wedge 2e_1 + \underbrace{3e_3 \wedge e_3}_{=0} \\
&= 4(e_2 \wedge e_1) + 2(e_2 \wedge e_3) + 6(e_3 \wedge e_1) \\
&= -4(e_1 \wedge e_2) - 6(e_1 \wedge e_3) + 2(e_2 \wedge e_3).
\end{aligned}$$