Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2021
29.07.2021

Schriftliche Prüfung zu Lineare Algebra II

(PO 2014 / 2016: Erste Klausur / PO 2008: Klausur)

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

Als Hilfsmittel sind zwei beidseitig selbst handbeschriebene DIN-A4-Blätter erlaubt. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Taschenrechner, Telefone oder Bücher sind nicht gestattet.

Schreiben Sie bitte leserlich und verwenden Sie keinen Bleistift. Wenn Sie Nebenrechnungen machen, die nicht korrigiert werden sollen, machen Sie dies bitte kenntlich (z. B. indem Sie sie durchstreichen).

Wenn der Platz für die Lösung einer Aufgabe nicht ausreicht, können Sie auf der Rückseite und auf dem leeren Papier am Ende des Klausurbogens weiterschreiben; machen Sie dann deutlich, was zu welcher Aufgabe gehört. (Sie können die Rückseiten und das leere Papier natürlich auch als Schmierpapier verwenden.)

Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig.

Alle Antworten sind zu begründen (wenn nicht anders angegeben). Sie dürfen bei Begründungen und Beweisen Resultate aus der Vorlesung verwenden (wenn nicht anders angegeben).

Füllen Sie dieses Deckblatt erst auf Aufforderung aus.
Lassen Sie die Klausur bis dahin geschlossen liegen.

Wenn Sie zum Ausfüllen aufgefordert werden: Schreiben Sie bitte DEUTLICH LESBAR in Druckbuchstaben.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikel-Nr: ____________ Studienfach: ____________________ Fachsemester: ______

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

☐ die Zulassung im SS 21 erworben habe

☐ (für Mathematiker inkl. Finanzmathematik:) an einer schriftlichen Prüfung zu lineare Algebra II bei

____________________ im WS / SS ________ teilgenommen, aber nicht bestanden habe.

☐ (für andere Fächer:) die Zulassung zur Prüfung im WS / SS ________ erworben habe.

____
Unterschrift

Hiermit bestätige ich, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

____
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Seien V, W und U endlich-dimensionale euklidische Vektorräume und seien $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to U$ lineare Abbildungen. Wir schreiben f^* und g^* für die assoziierten adjungierten Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Adjungierte von $g \circ f$ durch $f^* \circ g^*$ gegeben ist.

Es gilt

$$\langle g\circ f(v), u \rangle_U \overset{g^* \text{ adj}}{\underset{\text{zu } g}{=}} \langle f(v), g^*(u) \rangle_W \overset{f^* \text{ adj}}{\underset{\text{zu } f}{=}} \langle v, f^* \circ g^*(u) \rangle$$

für alle $v \in V$ und $u \in U$. Somit ist die Adjungierte von $g \circ f$ durch $f^* \circ g^*$ gegeben.

Aufgabe 2 (3 Punkte):
Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{10})$ nilpotent mit Minimalpolynom $\mu_f(x) = x^5$ und mit $\dim(\ker(f^3)) = 7$. Diese Einschränkungen sorgen dafür, dass solche nilpotenten Endomorphismen stets dieselbe Jordan-Normalform besitzen (das müssen Sie nicht zeigen). Bestimmen Sie diese Jordan-Normalform, d.h. bestimmen Sie die Jordan-Normalform J_f von f.

Da das Minimalpolynom von f durch x^5 gegeben ist, wissen wir, dass 5 der Nilpotenzgrad von f ist. Daher besitzt die Jordan-Normalform von f mindestens einen (5×5)-Jordanblock und keinen $(n\times n)$-Jordanblock für $n \geq 6$. Ist d_i die Anzahl der Jordanblöcke der Größe mindestens $(i\times i)$, so gilt

$a_1 + a_2 + a_3 = \dim(\ker(f^3)) = 7.$

Da nach der Aufgabenstellung die Jordan-Normalform eines solchen Endomorphismusses eindeutig ist, müssen wir also nur eine Jordan-Normalform mit mindestens einen (5×5)-Jordanblock und $a_1+a_2+a_3 = 7$ finden. Eine solche Jordan-Normalform ist durch

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} & \\ & & (0) \end{pmatrix}$$

gegeben $(a_1 = 3,\ a_2 = a_3 = 2)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte):
Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, welche durch die Vorschrift

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

auf der Basis $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ gegeben ist. Bestimmen Sie das Minimalpolynom μ_f von f.

Da auf obiger Basis offenbar $f^2 = f$ gilt, gilt diese Gleichung auch auf $\mathbb{R}^3$ (denn lineare Fortsetzung ist eindeutig). Somit erhalten wir also $f^2 - f = 0$, sodass das Minimalpolynom $\mu_f(x)$ ein (nicht-konstanter) Teiler von $x^2 - x = x(x-1)$ sein muss. Da f weder die Nullabbildung, noch die Identität ist, können x und $x-1$ nicht das Minimalpolynom sein. Somit muss $\mu_f(x) = x^2 - x$ gelten.

Aufgabe 4 (3 Punkte):
Sei K ein Körper, sei $U \subseteq K^n$ ein Untervektorraum und sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (K^n)^*$ die duale Basis assoziiert zur Standardbasis $e_1, \ldots, e_n \in K^n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \operatorname{Hom}(U, K^n) \to (U^*)^n, f \mapsto (\alpha_1 \circ f, \ldots, \alpha_n \circ f)$$

ein Isomorphismus (von K-Vektorräumen) ist.

Per Definition gilt $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und somit per linearer Fortsetzung $\alpha_i = pr_i$ für alle $1 \leq i \leq n$, wobei $pr_i : K^n \to K$ die Projektion auf die i-te Komponente ist. Nach der universellen Eigenschaft des Produktes $(U^*)^n$ ist daher

$$\varphi : \operatorname{Hom}(U, K^n) \to (U^*)^n, \; f \mapsto (\underbrace{\alpha_1}_{= pr_1} \circ f, \ldots, \underbrace{\alpha_n}_{= pr_n} \circ f)$$

eine Bijektion mit Umkehrabbildung gegeben durch

$$(g_1, \ldots, g_n) \mapsto \left(u \mapsto \begin{pmatrix} g_1(u) \\ \vdots \\ g_n(u) \end{pmatrix}\right).$$

Wir müssen somit nur noch zeigen, dass φ linear ist. Seien dazu $f, f' \in \operatorname{Hom}(U, K^n)$, $\lambda \in K$ und $u \in U$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f + f')(u) &= (\alpha_1 \circ (\lambda f + f'), \ldots, \alpha_n \circ (\lambda f + f'))(u) \\
&= (\alpha_1(\lambda f(u) + f'(u)), \ldots, \alpha_n(\lambda f(u) + f'(u))) \\
&= (\lambda \alpha_1(f(u)) + \alpha_1(f'(u)), \ldots, \lambda \alpha_n(f(u)) + \alpha_n(f'(u))) \\
&= \lambda(\alpha_1(f(u)), \ldots, \alpha_n(f(u))) + (\alpha_1(f'(u)), \ldots, \alpha_n(f'(u))) \\
&= \lambda(\alpha_1 \circ f, \ldots, \alpha_n \circ f)(u) + (\alpha_1 \circ f', \ldots, \alpha_n \circ f')(u) \\
&= (\lambda \varphi(f) + \varphi(f'))(u).
\end{aligned}$$

Also ist φ linear und somit ein Isomorphismus.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ und sei $f\colon V \times V \to W$ eine symmetrische bilineare Abbildung, welche außerdem alternierend ist, d.h. es gilt zusätzlich $f(v,v) = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass f die Null-Abbildung ist, also dass $f(v,v') = 0$ für alle $v, v' \in V$ gilt.

Seien $v, v' \in V$. Dann gilt

$$0 \overset{f \text{ alt.}}{=} f(v+v', v+v') \overset{f \text{ bil.}}{=} \underbrace{f(v,v)}_{\overset{f \text{ alt}}{=} 0} + f(v,v') + \underbrace{f(v',v)}_{\overset{f \text{ sym}}{=} f(v,v')} + \underbrace{f(v',v')}_{\overset{f \text{ alt}}{=} 0}$$

$$= 2f(v,v')$$

und somit $f(v,v') = 0$ durch Multiplikation mit $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

Also ist f die Nullabbildung.

Aufgabe 6 (3 Punkte):
Sei K ein Körper und sei V ein Vektorraum über K. Existiert stets eine lineare Abbildung

$$f\colon V \otimes V^* \otimes V^* \to K^2$$

mit $f(v \otimes \alpha \otimes \beta) = (\alpha(v), \beta(v))$ für alle $v \in V$ und $\alpha, \beta \in V^*$?

Nein. Betrachte $V = \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in V$, $\alpha = (1\ 0) \in V^*$ und $\beta = (0\ 1) \in V^*$.
Gäbe es eine solche lineare Abbildung f, so würde auch

$$f\left(2\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes (1\ 0) \otimes (0\ 1)\right)\right) = f\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \otimes (1\ 0) \otimes (0\ 1)\right) = \left((1\ 0)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, (0\ 1)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) = (2\ 2)$$

$$\shortparallel$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes (2\ 0) \otimes (0\ 1)\right) = \left((2\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, (0\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = (2\ 1)$$

in $\mathbb{R}^2$ gelten, was offenbar nicht der Fall ist.

Aufgabe 7 (3 Punkte):
Geben Sie einen Homomorphismus $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$-Algebren an, welcher das Polynom $x^2 - 3x + 2$ auf 0 abbildet.

Nach der universellen Eigenschaft des Polynomringes $\mathbb{R}[x]$ entspricht ein Homomorphismus $f: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$-Algebren genau einer Abbildung $\tilde{f}: \{x\} \to \mathbb{R}$ und zwar vermöge

$$\tilde{f} \mapsto \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \tilde{f}(x)^i \right).$$

Daher definieren wir $f: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ dadurch, dass wir x auf eine Nullstelle von $x^2 - 3x + 2$ abbilden. Da diese nach der pq-Formel durch

$$\frac{3}{2} + \underbrace{\sqrt{\underbrace{\frac{9}{4} - 2}_{=\frac{1}{4}}}}_{=\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{und} \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

gegeben sind, ist also

$$f: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i,$$

der durch die Abbildung $\{x\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, definierte Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren, ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren, welcher $x^2 - 3x + 2$ auf 0 abbildet ($1 - 3 + 2 = 0$).

Aufgabe 8 (2 Punkte):
Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Rechnen Sie nach, dass

$$v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = v_1 \wedge (v_1 + v_2) \wedge (v_1 + v_2 + v_3)$$

in $\bigwedge^3(V)$ gilt.

Es gilt

$$v_1 \wedge (v_1 + v_2) \wedge (v_1 + v_2 + v_3) = (\underbrace{v_1 \wedge v_1}_{= 0,\ v_1 \text{ doppelt}} + v_1 \wedge v_2) \wedge (v_1 + v_2 + v_3)$$

$$= \underbrace{v_1 \wedge v_2 \wedge v_1}_{\substack{= 0, \\ v_1 \text{ doppelt}}} + \underbrace{v_1 \wedge v_2 \wedge v_2}_{\substack{= 0, \\ v_2 \text{ doppelt}}}$$

$$+ v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$$

$$= v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 .$$