

Lineare Algebra II

Blatt 9

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 14.06.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche durch die Multiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 2021 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

gegeben ist. Seien darüberhinaus $g_1, g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die linearen Abbildungen, welche durch die Multiplikationen mit den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

gegeben sind. Geben Sie die Matrizen zu den linearen Abbildungen $f^*(g_1), f^*(g_2)$ (bezüglich der Standardbasen) an.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Für einen Körper K betrachten wir den K -Vektorraum $K^{\oplus \mathbb{N}}$.

- (i) Zeigen Sie, dass der Dualraum von $K^{\oplus \mathbb{N}}$ durch $K^{\mathbb{N}}$ gegeben (also isomorph zu $K^{\mathbb{N}}$) ist.
- (ii) Begründen Sie, dass $K^{\oplus \mathbb{N}}$ kein Dualraum ist.
Genauer: Zeigen Sie, dass es keinen K -Vektorraum V gibt, sodass der Dualraum V^* isomorph zu $K^{\oplus \mathbb{N}}$ ist.

s.u.
✓

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei \mathbb{K} der Körper der reellen Zahlen/~~der Körper der komplexen Zahlen~~ und sei V ein n -dimensionaler euklidischer/~~unitärer~~ \mathbb{K} -Vektorraum mit reolem/~~hermiteschem~~ Skalarprodukt $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Begründen Sie, dass die lineare Abbildung

$$h(\langle -, - \rangle): V \rightarrow V^*, v \mapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle)$$

ein Isomorphismus ist und zeigen Sie, dass die Adjungierte eines Endomorphismus $g \in \text{End}(V)$ unter dem Isomorphismus $h(\langle -, - \rangle)$ mit der dualen Abbildung g^* identifiziert wird.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei U eine Teilmenge von V . Wir definieren den Annulator U^0 von U als die Teilmenge des Dualraumes V^* , welche alle Vektoren in U auf 0 abbildet.

- (i) Begründen Sie kurz, dass U^0 ein Untervektorraum von V^* ist.
- (ii) Sei nun U ein Untervektorraum von V . Stellen Sie eine gültige Formel auf, mit der man die Dimension von U^0 aus den Dimensionen von U und von V berechnen kann.
- (iii) Zeigen Sie die von Ihnen aufgestellte Formel aus dem vorherigen Aufgabenteil.

Aufgabe 1

Die linearen Abb. $f^*(g_1)$ und $f^*(g_2)$ sind pr Definition durch $g_1 \circ f$ und $g_2 \circ f$ gegeben, also durch

$$g_1 \circ f = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2021 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (7 \ 6 \ 2021)$$

und

$$g_2 \circ f = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2021 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (14 \ 6 \ 2021).$$

Aufgabe 2

(i)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: (\mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}})^* = \text{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}},$$

der
Clue
von
Teil
(i)

die wir folgt definiert ist. Eine lineare Abbildung
 $f: \mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}$ entspricht vermöge Einschränkung und linearer
 Fortsetzung nur Abbildung auf der Standardbasis $e_0, e_1, \dots \in \mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}}$.
 Wir haben also eine bijektion

hier auf jede andere Basis nehmen

$$\text{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}}, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Abb}(\underbrace{\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{= \mathfrak{I}}, \mathbb{K}), f \mapsto f|_{\mathfrak{I}}.$$

Eine Abbildung $\mathfrak{I} \rightarrow \mathbb{K}$ entspricht nun aber der Wahl einer Folge
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Einträgen aus \mathbb{K} , also einem Element aus $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
 Dieses Element $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ soll nun das Bild von f unter
 φ sein. Es gilt also

$$\varphi(f) = (f|_{\mathfrak{I}}(e_n))_{n \in \mathbb{N}} = (f(e_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Da

$$\varphi(\lambda f + g) = (\lambda f + g(e_n))_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda f(e_n) + g(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

$$= \lambda f(e_n)_{n \in \mathbb{N}} + g(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$= \lambda \varphi(f) + \varphi(g),$$

ist die Abbildung φ linear. Bleibt also zu zeigen, dass φ bijektiv ist. Betrachte dazu die Abbildung

$$\psi: K^{\oplus \mathbb{N}} \rightarrow \text{Hom}(K^{\oplus \mathbb{N}}, K),$$

welche ein Element $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf die lineare Fortsetzung der Abbildung $B \rightarrow K$, entlang schicken. Es gilt also

$$\psi((a_n)_{n \in \mathbb{N}})(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n a_n.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(f)(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n) &= \psi((f(e_n))_{n \in \mathbb{N}})(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n f(e_n) \\ &= f(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n) \end{aligned}$$

für alle $f \in \text{Hom}(K^{\oplus \mathbb{N}}, K)$ und $\lambda_n e_n \in K^{\oplus \mathbb{N}}$,
sodass $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\text{Hom}(K^{\oplus \mathbb{N}}, K)}$ und

$$\varphi \circ \psi((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\psi((a_n)_{n \in \mathbb{N}})(e_n))_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

für alle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\oplus \mathbb{N}}$, sodass $\psi \circ \varphi = \text{id}_{K^{\oplus \mathbb{N}}}$. Also ist φ bijektiv mit inverser Abbildung ψ .

(ii)

"Alpha Null"
↓

Zunächst gilt $\dim(K^{\oplus \mathbb{N}}) = \#\mathbb{N}$ ($= \aleph_0$). Es reicht also zu zeigen, dass Dualräume nie diese Dimension haben können.

Fall 1: $\dim(V) = n$ endlich.

Dann gilt

$$V^* = \text{Hom}(V, k) \cong \text{Hom}(k^n, k) \cong k^n \quad (\text{vgl. Satz 8.2.7})$$

und somit $\dim(V^*) = n \neq \aleph_0$.

Fall 2: $\dim(V) = \aleph_0$. abzählbar unendlich

Dann gilt

$$V^* = \text{Hom}(V, k) \cong \text{Hom}(k^{\oplus \aleph_0}, k) \cong k^{\aleph_0}$$

und somit $\dim(V^*) \neq \aleph_0$ (vgl. Bsp. 8.2.10)

Fall 3: $\dim(V) > \aleph_0$ überabzählbar

Sei $v_i, i \in I$, eine Basis von V . Für jedes $j \in I$ definieren wir

$$f_j \in V^* = \text{Hom}(V, k)$$

auf der Basis $v_i, i \in I$, durch $f_j(v_j) = 1$ und $f_j(v_i) = 0$ für $i \in I \setminus \{j\}$. Dann sind $f_j, j \in J$, offenbar linear unabhängig und somit $\dim(V^*) \geq \dim(V) > \aleph_0$.

Es kann also kein Vektorraum V mit $V^* \cong k^{\oplus \aleph_0}$ geben.

Aufgabe 3

nur "halb-linear"
 $\lambda \in \mathbb{C}$ \checkmark $\langle v, w \rangle$

Korrektur: Für $K = \mathbb{C}$ ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ keine lineare Abbildung und somit $h(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ nicht wohldefiniert. Da waren wir leider etwas unachtsam. Als Entschuldigung schreibt jeder, der Blatt 9 abgegeben hat, volle Punkte für Aufgabe 3!

Wir schauen uns also nur $IK = IR$ an.

Ist $f \in End(V)$, so haben wir sowohl die duale Abbildung, als auch die Adjungierte als f^* geschrieben hier schreiben wir nun f^{adj} für die Adjungierte und f^* für die duale Abbildung.

Da $\dim(V) = n = \dim(V^*)$, ist $h(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ bijektiv genau dann, wenn $h(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ injektiv ist. Nun gilt

$$\langle v, w \rangle = \begin{cases} > 0, & v \neq w \\ 0, & v = w \end{cases}$$

$$\ker(h(\langle \cdot, \cdot \rangle)) = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in V\} = \{0\},$$

sodass $h(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ injektiv ist. Jetzt wollen wir zeigen, dass

$$h(\langle \cdot, \cdot \rangle)^{-1} \circ f^* \circ h(\langle \cdot, \cdot \rangle) = f^{\text{adj}}$$

also f^* und f^{adj} vermögen $h(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ miteinander identifiziert werden. Es gilt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle(u) = \langle \cdot, u \rangle$$

$$h(\langle \cdot, \cdot \rangle)^{-1} \circ f^* \circ h(\langle \cdot, \cdot \rangle)(u) = h(\langle \cdot, \cdot \rangle)^{-1} \circ f^*(\langle u, \cdot \rangle)$$

$$= h(\langle \cdot, \cdot \rangle)^{-1} \circ \langle \cdot, u \rangle \circ f$$

$$= h(\langle \cdot, \cdot \rangle)^{-1} \circ \langle \cup, f(\cdot) \rangle$$

$$= h(\langle \cdot, \cdot \rangle)^{-1} \circ \langle f^{\text{auf}}(\omega), \cdot \rangle$$

$$= f^{\text{auf}}(\omega)$$

für alle $\omega \in V$, also $f^{\text{auf}} = h(\langle \cdot, \cdot \rangle)^{-1} \circ f^* \circ h(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Aufgabe 4

(i)

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} U^{\circ} &= \{f \in V^* \mid f(\omega) = 0 \text{ für alle } \omega \in U\} \\ &= \{f \in V^* \mid U \subseteq \text{ker}(f)\}. \end{aligned}$$

Da $\text{ker}(0) = V$, gilt $0 \in U^{\circ}$. Seien nun $f, g \in U^{\circ}$ und $\lambda \in k$.
Dann gilt

$$\lambda f + g|_U = \lambda f|_U + g|_U = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

für alle $\omega \in U$. Also $\lambda f + g \in U^{\circ}$. Somit ist U° ein UVR von V^* .

(ii)

$$\dim(U^{\circ}) = \dim(V) - \dim(U)$$

(iii)

Sei $i: U \rightarrow V$ die Inklusion. Dann gelten

$$\text{ker}(i^*) = \{f \in V^* \mid f \circ i = 0\} = U^{\circ}$$

$f \circ i(\omega) = f(i(\omega)) \quad \text{für alle } \omega \in U$

und

$$\text{im}(i^*) = \{g \in U^* \mid f \circ i = g \text{ für ein } f \in V^*\} = U^*$$



Ist $g: U \rightarrow K$ linear, so existiert stets eine lineare Abbildung
 $f: V \rightarrow K$ mit $f \circ i = g$.

Wähle Basis u_1, \dots, u_r von U und erweite zu einer Basis
 $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_n$ von V . Definiere nun f auf dieser Basis durch

$$\begin{aligned} u_1 &\mapsto g(u_1) \\ \vdots & \quad \vdots \\ u_r &\mapsto g(u_r) \\ v_1 &\mapsto \text{beliebig} \\ \vdots & \quad \vdots \\ v_n &\mapsto \text{beliebig} \end{aligned}$$

Vermöge des Isomorphiesatzes erhalten wir also $V/U^\circ \cong U^*$
und somit

$$\underbrace{\dim(V^*) - \dim(U^\circ)}_{= \dim(V)} = \dim(V^*/U^\circ) = \dim(U^*) = \dim(U),$$

also

$$\dim(U^\circ) = \dim(V) - \dim(U).$$