

Lineare Algebra II

Blatt 8

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 07.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Nutzen Sie die Cramersche Regel, um

- (i) die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

zu bestimmen.

- (ii) die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Überprüfen Sie ihr Ergebnis anschliessend mit Hilfe der Inversen A^{-1} aus dem Aufgabenteil.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei (M, \leq) eine partiell geordnete Menge. Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq M$ eine Antikette, wenn je zwei verschiedene Elemente a und a' von A unvergleichbar sind, also weder $a \leq a'$ noch $a' \leq a$ gelten. Zeigen Sie, dass M eine Antikette A besitzt, sodass jedes Element von M mit einem Element von A vergleichbar ist.

Hinweis: Wenden Sie Zorn's Lemma auf die durch " \subseteq " geordnete Menge aller Antiketten von M an.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Seien M, M' und N Mengen.

- (i) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f: N \rightarrow M \times M'$ auf naheliegende Weise einem Paar von Abbildungen $f_1: N \rightarrow M$ und $f_2: N \rightarrow M'$ entspricht. Überlegen Sie sich dabei, was "entsprechen" in diesem Kontext bedeutet.
- (ii) Geben Sie in Abhängigkeit von M und M' (und unabhängig von N) eine Menge K an, sodass eine Abbildung $f: K \rightarrow N$ auf analoge naheliegende Weise einem Paar von Abbildungen $f_1: M \rightarrow N$ und $f_2: M' \rightarrow N$ entspricht.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei M eine Menge und sei K ein Körper.

- (i) Konstruieren Sie einen K -Vektorraum $F(M)$, sodass M eine Basis von $F(M)$ ist.
Genauer: Formal gesehen müssen die Elemente von M keine Vektoren in $F(M)$ sein, sondern vermöge einer Bijektion mit einer Teilmenge von $F(M)$ identifiziert werden können. Diese Teilmenge soll dann eine Basis von $F(M)$ sein.
- (ii) Sei nun V ein weiterer K -Vektorraum. Zeigen Sie, dass es eine naheliegende Bijektion zwischen der Menge der beliebigen Abbildungen von M nach V und der Menge der linearen Abbildungen von $F(M)$ nach V gibt.

Aufgabe 1

(i)

Wir berechnen zunächst die Determinante von A:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 6 + 1 = 7$$

Nun gilt nach der Cramerschen Regel

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(ii)

Betrachte das LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach der Cramerschen Regel gilt nun

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{7} = \frac{21}{7} = 3,$$

$\det(A) \rightarrow$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

und

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{7} = \frac{-7 - 21}{7} = -4.$$

Überprüfung mit A^{-1} :

Gilt

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen also $A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Ist $M = \emptyset$, so wähle $A = \emptyset$. Betrachte nun aber nicht leere potentiell geordnete Mengen.

Ein bzgl. Inklusion maximale Antikette hat zunächst einmal die gewünschte Eigenschaft:

Ist A_{\max} eine max. Antikette, so ist $A_{\max} \cup \{m\}$ für jedes $m \in M \setminus A_{\max}$ keine Antikette, sodass, da A_{\max} eine Antikette ist, das Element m mit einem Element von A_{\max} vergleichbar sein muss. Zudem ist jedes $a \in A_{\max}$ mit sich selbst vergleichbar. Insgesamt ist also jedes Element von M mit einem Element aus A_{\max} vergleichbar.

Es reicht also, die Existenz von maximalen Antikketten zu zeigen. Dazu betrachten wir die Menge

$$\underline{\Phi} = \{A \subseteq M \mid A \text{ ist Antikette}\}$$

mit der Inklusionsordnung. Die Menge $\underline{\Phi}$ ist nicht leer, da $\emptyset \in \underline{\Phi}$. Sei nun K eine Kette in $\underline{\Phi}$ und betrachte $A_K = \bigcup_{A \in K} A$. Dann gilt $A \subseteq A_K$ für alle $A \in K$. Da je bei verschiedenen Elementen $a, a' \in A_K$ bereits in einem Untermengen A enthalten und somit nicht vergleichbar sind, ist A_K eine Antikette und demnach eine obere Schranke von K in $\underline{\Phi}$. Also hat $\underline{\Phi}$ nach Zorn's Lemma maximales Element.

$$a, a' \in A_K = \bigcup_{A \in K} A$$

$\rightarrow a \in A, a' \in A'$
für gewisse $A, A' \subseteq K$

Da K klein, gilt
 $A \subseteq A'$ oder $A' \subseteq A$

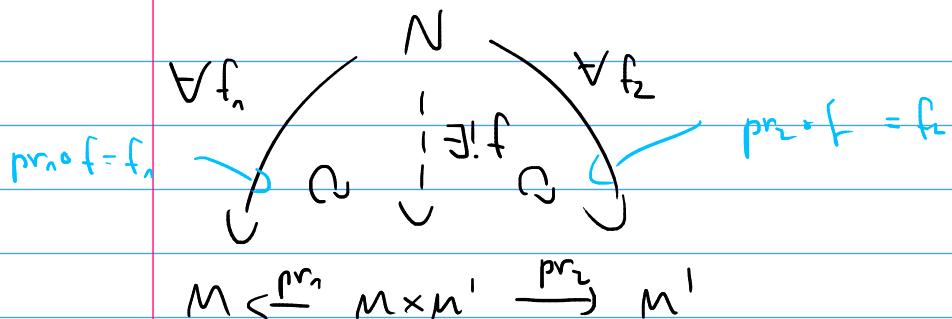
$\rightarrow a, a' \in A'$ oder
 $a, a' \in A$

Aufgabe 3

(i)

Bew.: Für f_1 zu Abstr. $f_1: N \rightarrow M$ und $f_2: N \rightarrow M'$ ex. gern eine Abstr. $f: N \rightarrow M \times M'$ mit $\text{pr}_1 \circ f = f_1$ und $\text{pr}_2 \circ f = f_2$, wobei $\text{pr}_1: M \times M' \rightarrow M$, $(m, m') \mapsto m$ und $\text{pr}_2: M \times M' \rightarrow M'$, $(m, m') \mapsto m'$ die Projektionen sind.

Anschaulich:



Seien $f_1: N \rightarrow M$ und $f_2: N \rightarrow M'$ Abbildungen und betrachte $f = (f_1, f_2): N \rightarrow M \times M'$, $n \mapsto (f_1(n), f_2(n))$. Dann gelten offenbar $\text{pr}_1 \circ f = f_1$ und $\text{pr}_2 \circ f = f_2$. Müssen noch die Eindeutigkeit zeigen. Seien f und \tilde{f} zwei solche Abbildungen, es gelten also

$$\text{pr}_1 \circ f = f_1 \quad \text{und} \quad \text{pr}_2 \circ f = f_2$$

und

$$\text{pr}_1 \circ \tilde{f} = f_1 \quad \text{und} \quad \text{pr}_2 \circ \tilde{f} = f_2.$$

Sei $n \in N$ und schreibe $f(n) = (m, m')$ und
 $\hat{f}(n) = (\tilde{m}, \tilde{m}')$. Dann gelten

$$m = \text{pr}_1(m, m') = \text{pr}_1(f(n)) = f_1(n) = \text{pr}_1(\hat{f}(n)) = \text{pr}_1(\tilde{m}, \tilde{m}') = \tilde{m}$$

und

$$m' = \text{pr}_2(m, m') = \text{pr}_2(f(n)) = f_2(n) = \text{pr}_2(\hat{f}(n)) = \text{pr}_2(\tilde{m}, \tilde{m}') = \tilde{m}'$$

und somit $f = \hat{f}$.

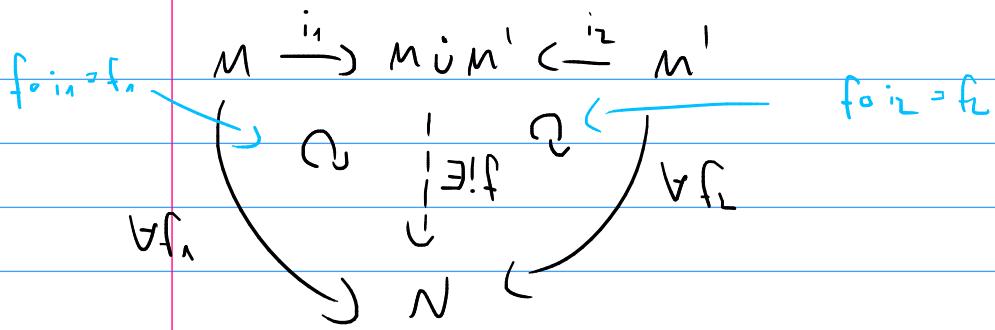
(ii)

Beh.: $N = M \cup M'$

↑ schaut für $M \cap M' \neq \emptyset$
 kann man eine disjunkte
 Vereinigung bilden:
 M entspricht $M \times \{\cdot 1\}$
 M' entspricht $M' \times \{\cdot 2\}$
 nun wirklich disjunkt

Wir wollen also zeigen, dass für gegebene Abb. $f_1: M \rightarrow N$
 und $f_2: M' \rightarrow N$ genau ein Abb. $f: M \cup M' \rightarrow N$ ex.,
 sodass $f \circ i_1 = f_1$ und $f \circ i_2 = f_2$ gelten, wobei $i_1: M \rightarrow M \cup M'$,
 $m \mapsto m$ und $i_2: M' \rightarrow M \cup M'$, $m' \mapsto m'$ die Inklusionen sind.

"Anschaulich":



Seien $f_1: M \rightarrow N$ und $f_2: M' \rightarrow N$ Abbildungen und betrachte $f: M \oplus M' \rightarrow N$, $m \mapsto \begin{cases} f(m), & m \in M \\ f_1(m), & m \in M' \end{cases}$. Dann gelten offenbar $f \circ i_1 = f_1$ und $f \circ i_2 = f_2$. Bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien f und \tilde{f} zwei solche Abbildungen, es gelten also

$$f \circ i_1 = f_1 \text{ und } f \circ i_2 = f_2$$

und

$$\tilde{f} \circ i_1 = f_1 \text{ und } \tilde{f} \circ i_2 = f_2.$$

Dann erhalten wir

$$f(m) = f(i_1(m)) = f_1(m) = \tilde{f}(i_1(m)) = \tilde{f}(m)$$

für alle $m \in M$ und

$$f(m') = f(i_2(m')) = f_2(m') = \tilde{f}(i_2(m')) = \tilde{f}(m')$$

für alle $m' \in M'$. Somit gilt $f = \tilde{f}$.

Aufgabe 4

(i)

Betrachte den K -Vektorraum

$$\underbrace{K}_{= F(M)}^{\oplus M} = \{(a_m)_{m \in M} \in K^M \mid a_m = 0 \text{ für } \underbrace{\text{fast alle } m \in M}_{\text{für alle bis auf endlich viele}}\}.$$

Die Vektoren der Form

$$e_m = (0, \underset{i}{\dots}, 1, 0, \dots)$$

m -ter Eintrag

bilden ein Basis von $F(M)$ (mit analogen Argumenten wie bei K^n). Zudem lässt sich M mit $E_M = \{e_m \mid m \in M\}$ über die Bijektion

$$\varphi: M \rightarrow E_M, m \mapsto e_m$$

identifizieren.

(ii)

Sei V ein K -Vektorraum und betrachte die Abbildungen

$$\alpha: \text{Abb}(M, V) \rightarrow \text{Hom}(F(M), V)$$

$$f \mapsto (\sum_{m \in M} f_m, \sum_{m \in M} f(m))$$

für f via φ von M auf V linear fortgesetzt, ordne L.A. I

Menge der
Abb. von M
nach V

und

$$\beta: \text{Hom}(F(M), V) \rightarrow \text{Abb}(M, V).$$

$$g \mapsto g|_{E_m} \circ \psi$$

$$\text{Zsh}: \alpha^{-1} = \beta$$

Sei $f \in \text{Abb}(M, V)$. Dann gilt

$$\beta \circ \alpha(f)(m) = \beta(\bar{f})(m) = \bar{f}|_{E_m} \circ \underbrace{\psi(m)}_{\epsilon_m} = f(m)$$

für jedes $m \in M$. Also ist $\beta \circ \alpha(f) = f$ und somit erhalten wir $\beta \circ \alpha = \text{Id}_{\text{Abb}(M, V)}$.

Sei nun $g \in \text{Hom}(F(M), V)$. Dann gilt

$$\alpha \circ \beta(g)(\{\lambda_m\}) = \overline{\beta(g)}(\{\lambda_m\})$$

$$= \overline{g|_{E_m} \circ \psi(\{\lambda_m\})}$$

$$= g(\{\lambda_m\}),$$

$$\begin{array}{c} g|_{E_m} \circ \psi(m) \\ \hskip 1cm \swarrow m \\ \hskip 1cm \underbrace{g|_{E_m}}_{g|_{E_m}} \end{array}$$

für alle $v = \{\lambda_m \in F(m)\}$, sodass $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\text{Hom}(F(M), V)}$.
Somit gilt also $\alpha^{-1} = \beta$.