Lineare Algebra II
Blatt 7

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 31.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Suchen Sie (z.B in einem Buch oder im Internet) nach einem (beliebigen!) Beweis der Aussage, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ überabzählbar sind und geben Sie eine Skizze des Beweises mit eigenen Worten wieder.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Welche der Axiome einer partiellen Ordnung erfüllen die folgenden Relationen:

(i) $m \sim n$, wenn m und n einen gemeinsamen Teiler (echt) größer als 1 besitzen auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

(ii) $m \sim n$, wenn m ein Teiler von n ist auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

(iii) $M \sim M'$, wenn eine injektive Abbildung von M nach M' existiert auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$.

(iv) $U \sim U' \Leftrightarrow U \subseteq U'$ auf der Menge der Untervektorräume eines Vektorraumes V.

Handelt es sich in den Fällen, in denen alle Axiome einer partiellen Ordnung erfüllt sind, sogar um totale Ordnungen?

Aufgabe 3 (5 Punkte): Bestimmen Sie alle Relationen auf einer Menge M, welche zugleich eine Äquivalenzrelation und eine partielle Ordnung sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei K ein Körper. Wir betrachen nun den K-Vektorraum $V = K^{\mathbb{N}}$ und die Teilmenge

$$U = K^{\oplus \mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid a_n = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

(ii) Konstruieren Sie einen Endomorphismus des Quotientenvektorraumes $V/U = K^{\mathbb{N}}/K^{\oplus\mathbb{N}}$, welcher surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(iii) Folgern Sie, dass V/U ein unendlich-dimensionaler Vektorraum ist.

Aufgabe 1

- Reicht z.z., dass $(0,1) \subset \mathbb{R}$ überabzählbar ist
- Widerspruchsannahme: Ang., $(0,1)$ wäre abzählbar unendlich
- Wähle Bijektion $f: \mathbb{N} \to (0,1)$ (ex. nach vorherigem Punkt)

$$\rightsquigarrow \quad 0 \overset{f}{\mapsto} 0,a_{0,0},a_{0,1},\dots$$
$$1 \mapsto 0,a_{1,0},a_{1,1},\dots$$
$$\vdots$$

- Konstruiere nun Element in $(0,1)\setminus \mathrm{im}(f)$:

$$0,b_1,b_2,\dots$$

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{i,i} \neq 1 \\ 2, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist tatsächlich nicht im Bild, also Widerspruch

per Konstruktion $f(m)$ an "Diagonal-eintrag" $a_{i,i}$ unterschied-lich für jedes $m \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2

(i)

Reflexivität: Nicht gegeben.
Die Zahlen 1 und 1 haben keinen solchen gemeinsamen Teiler

Antisymmetrie: Nicht gegeben
Es gilt $2 \sim 4$ und $4 \sim 2$, aber $2 \neq 4$.
gemeinsamer Teiler 2

Transitivität: Nicht gegeben
Es gilt $2 \sim 6$ und $6 \sim 3$, aber $2 \not\sim 3$.
gemeinsamer Teiler 2 gemeinsamer Teiler 3 verschiedene Primzahlen

(ii)

Reflexivität: Gilt
Da $m \cdot 1 = m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, gilt stets $m \sim m$.

Antisymmetrie: Gilt
für zwei nat. Zahlen m und n
Gelten $m \sim n$ und $n \sim m$, so ex. $a, b \in \mathbb{N}$ mit $ma = n$ und $nb = m$. Einsetzen liefert $mab = n$, also $a = b = 1$ und somit $m = n$.

Transitivität: Gilt
für zwei nat. Zahlen m und n
Gelten $m \sim n$ und $n \sim \ell$, so ex. $a, b \in \mathbb{N}$ mit $ma = n$ und $nb = \ell$. Einsetzen liefert $mab = \ell$, also $m \sim \ell$.

(iii)

Reflexivität: Gilt

Ex. stets Identitätsabb. $id_M : M \to M$. Somit gilt $M \sim M$ für alle Teilmengen $M \subset \mathbb{R}$.

Antisymmetrie: Gilt nicht

Betrachte $\{0\}, \{1\} \subset \mathbb{R}$. Dann gibt es jeweils eine bijektive Abbildung $\{0\} \to \{1\}$ und $\{1\} \to \{0\}$, aber $\{0\} \neq \{1\}$.

Transitivität: Gilt

Sind M, M' und M'' Teilmengen von $\mathbb{R}$ so, dass $f: M \to M'$ und $g: M' \to M''$ injektive Abbildungen sind, so ist $g \circ f$ eine injektive Abbildung von M nach M''.

(iv)

Reflexivität: Gilt

Da stets $U \subseteq U$, gilt $U \sim U$ für jeden Untervektorraum U eines Vektorraumes V.

Antisymmetrie:

Gelten $U \subseteq U'$ und $U' \subseteq U$ für zwei UVR U und U' eines Vektorraumes V, so erhalten wir $U = U'$ (Definition von Mengengleichheit).

Transitivität:

Gelten $U \subseteq U'$ und $U' \subseteq U''$ für drei UVR U, U' und U'' eines Vektorraums V, so offenbar auch $U \subseteq U''$.

Die partiellen Ordnung aus (ii) ist keine totale Ordnung:

- $2 \nmid 3$ und $3 \nmid 2$

Die partielle Ordnung aus (iv) ist i.A. keine totale Ordnung:
Gilt $\dim(V) \geq 2$, so wähle zwei verschiedene 1-dim UVR
U und U'. Dann gilt $U \not\subset U'$ und $U' \not\subset U$.

Gilt $\dim(V) \leq 1$, so ist eine totale Ordnung gegeben:

$\dim(V) = 0$: $\{0\}$

$\dim(V) = 1$: $\{0\} \subset V$

Aufgabe 3

Sei $\sim$ eine solche Relation. Für alle $a,b \in M$ gelten dann

$a \sim b \Rightarrow b \sim a$

und

$(a \sim b \wedge b \sim a) \Rightarrow a = b,$

sodass wir für alle $a,b \in M$ mit $a \sim b$ erhalten, dass $a = b$ gilt. Also ist $\sim$ die Gleichheitsrelation.

Andersherum erfüllt die Gleichheitsrelation offenbar die Axiome von einer Äquivalenzrelation und einer part. Ordnung.

Aufgabe 4

(i)

Offenbar gilt $(0,0,\dots) \in K^{\oplus \mathbb{N}}$. Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $K^{\oplus \mathbb{N}}$, so auch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

weiterhin nur endlich viele Einträge ungleich Null.

und

$\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also ist $U = K^{\oplus \mathbb{N}}$ ein UVR von $V = K^{\mathbb{N}}$.

ändern wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in endl. vielen Einträgen, so ändert sich auch $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ nur in endl. vielen Einträgen

(ii)

Betrachte die wohldefinierte Abbildung

$$f: V/U \to V/U, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + U \mapsto (a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} + U.$$

Diese ist linear:

$$f(\underbrace{\lambda((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + U) + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + U}_{(\lambda a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} + U}) = (\lambda a_{2n} + b_{2n})_{n\in\mathbb{N}} + U$$

$$= \lambda((a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} + U) + (b_{2n})_{n\in\mathbb{N}} + U$$

$$= \lambda f((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + U) + f((b_{2n})_{n\in\mathbb{N}} + U)$$

Die Abbildung f ist

- surjektiv:
  Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + U \in V/U$ und betrachte das Element $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + U$, wobei $a_n = \begin{cases} b_{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. Dann gilt $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + U) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + U$.

- nicht injektiv:
  Modifiziere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von oben: $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $\tilde{a}_n = \begin{cases} b_{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$
  Dann gilt $f((\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} + U) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + U$, aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + U$ und $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} + U$ unterscheiden sich in unendlich vielen Einträgen voneinander, sodass sie zwei verschiedene Elemente in V/U definieren.

(iii)

Wir wissen, dass eine surjektive lineare Abbildung von zwei gleich-dimensionalen endl.-dimensionalen Vektorräumen bereits injektiv sein muss. Also kann V/U nach (ii) nicht endlich-dimensional sein.