

Lineare Algebra II

Blatt 6

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 24.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Bestimmen Sie die Minimalpolynome der folgenden fünf Endomorphismen:

- (i) $f: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x)$.
- (ii) $g: \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}_2^3$, $(a, b, c) \mapsto (a, a + b, b + c)$.
- (iii) $(\bar{}): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, wobei wir \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum auffassen.
- (iv) $()^T: K^{n \times n} \rightarrow K^{n \times n}$, $A \mapsto A^T$, wobei K ein beliebiger Körper ist.
- (v) $\frac{d}{dx}: \mathbb{R}[x]_{\leq d} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq d}$, $f \mapsto \frac{df}{dx}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Seien $A, B \in K^{n \times n}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (i) $\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x)$
- (ii) $\mu_{AB}(x) = (\mu_A \cdot \mu_B)(x)$
- (iii) $\mu_{AB}(x^2) = (\mu_A \cdot \mu_B)(x)$
- (iv) $\deg(\mu_A) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in K: A = \lambda I_n$
- (v) $\deg(\mu_A) = n \Leftrightarrow \mu_A = \chi_A$

Bemerkung zu (v): Wie sonst auch dürfen Sie sich aussuchen, mit welcher der Definitionen des charakteristischen Polynomes Sie arbeiten. Der Wahrheitsgehalt der Aussage kann allerdings von der Definition abhängen.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei K ein Körper und sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Nutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton, um in Abhängigkeit des charakteristischen Polynomes χ_A die Inverse von A zu bestimmen.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei K ein Körper und sei $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in K[x]$ ein normiertes Polynom mit Koeffizienten aus K . Zum Polynom f betrachten wir die Matrix

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n},$$

genannt die Begleitmatrix zu f . Wir wollen uns ohne die Verwendung des charakteristischen Polynomes und des Satzes von Cayley-Hamilton überlegen, dass f das Minimalpolynom von A_f ist.

- (i) Zeigen Sie, dass f ein Polynom minimalen Grades ist mit $f(A_f) \cdot e_1 = 0$.
- (ii) Begründen Sie, dass $f(A_f) \cdot e_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.
- (iii) Folgern Sie, dass f das Minimalpolynom von A_f ist.

Aufgabe 1

(i)

Die darstellende Matrix von f bzgl. der Standardbasis ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$$

A ist
kein
skalares
Vielfaches
von I_2

und hat nach Bem. 7.S.S das gleiche Minimopolynom wie f . Nun sind $A^0 = I_2$ und A offenbar linear unabhängig, sodass $\deg(\mu_A) \geq 2$ gelten muss.

Da

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

gilt

$$A^2 - A - I_2 = 0,$$

sodass wir $\mu_f = \mu_A = x^2 - x - 1 \in \mathbb{Q}(x)$ erhalten.

(ii)

Die darstellende Matrix von g bzgl. der Standardbasis ist gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3 \times 3}$$

und es gilt erneut $\mu_B = \mu_{B^2}$. Da

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 I_3 + \lambda_2 B + \lambda_3 B^2 = 0 \rightsquigarrow \lambda_3 = 0$ wegen Eintrag 3,1 von B^2 ; B kein Shatzes Vielfaches von $I_3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

sehen wir, dass $B = I_3$, B und B^2 linear unabhängig sind und somit $\deg(\mu_B) \geq 3$ gilt. Nun gilt

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$B^3 + B^2 + B + I_3 = 0,$$

also $\mu_B = \mu_{B^3} = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

(iii)

nach Satz
7.5.4

\bar{C} ist
kein Shatzes
Vielfaches von
 $\text{id}_{\mathbb{C}}$

Da $(\bar{C})^2 = \text{id}_{\mathbb{C}}$, gilt $(\bar{C})^2 - \text{id}_{\mathbb{C}} = 0$, sodass $\mu_{\bar{C}} \mid x^2 - 1$ ein Teiler von $x^2 - 1 \in (\mathbb{C}[x])$ ist. Nun sind $\text{id}_{\mathbb{C}}$ und \bar{C} linear unabhängig, sodass $\deg(\mu_{\bar{C}}) \geq 2$ gelten muss. Also erhalten wir $\mu_{\bar{C}} = x^2 - 1$.

(iv)

Für $n=1$ gilt offenbar $(\bar{C})^\top = \text{id}_{\mathbb{C}^{1 \times 1}}$, sodass $\mu_{\bar{C}^\top} = x - 1$. Sei nun $n \geq 2$. Dann gilt $((\bar{C})^\top)^2 = \text{id}_{\mathbb{C}^{n \times n}}$, sodass $\mu_{\bar{C}^\top}$

(Γ) ist für $n \geq 2$ kein
stetiges Vielfaches von $\text{Id}_{K^{n,n}}$

ein Teiler von $x^2 - 1$ ist. Da $(\Gamma)^0$ und (Γ) linear unabhängig sind, gilt bereits $\mu_{\Gamma} = x^2 - 1 \in K(x)$.

(v)

Gilt $d = -\infty$, also $K(x)_{\leq d} = \{0\}$, so erhalten wir $(\frac{d}{dx})^0 = \text{Id}_{K(x)_{\leq d}} = 0$, sodass $\mu_{\frac{d}{dx}} = 1 \in K(x)$.

Sei nun $d \geq 0$. Dann ist $1, x, x^2, \dots, x^d$ eine Basis von $K(x)_{\leq d}$ und die darstellende Matrix von $\frac{d}{dx}$ bzgl. dieser Basis (auf beiden Seiten) hat die Form

$$\text{da } \frac{d}{dx} x^n \begin{matrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & d \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in K^{(d+1) \times (d+1)}$$

Diese Matrix ist nilpotent mit Nilpotenzgrad $d+1$, sodass wir $\mu_{\frac{d}{dx}} = \mu_n = x^{d+1}$ erhalten.

$$\mu_n | x_n = x^{d+1} \text{ und Nilpotenzgrad } d+1$$

Cayley-Hamilton

+

7.5.4

Aufgabe 2

(i)

Gilt nicht:

Es gilt $M_{I_2} = x - 1$ und $M_{-I_2} = x + 1$, aber

$M_{I_2} + M_{-I_2} = 2x$ ist nicht einmal ein normiertes Polynom

(insbes. kein Minimalpolynom).

(ii)

Gilt nicht:

Haben

i.A. z.B. über \mathbb{H}

$$M_{I_2 \cdot I_2} = M_{I_2} = x - 1 \neq (x - 1)^2 = M_{I_2} \cdot M_{I_2}$$

(iii)

Gilt nicht:

über \mathbb{H}

Die Ungleichung aus (ii) gilt auch noch, wenn wir auf der linken Seite x durch x^2 ersetzen.

(iv)

Gilt (zumindest für $n \geq 1$):

extremer
Sonderfall

$$\left[_{n=0}\right]$$

$$\rightsquigarrow \text{Id}_{\mathbb{H}^{n+1}} = 0$$

$$\rightsquigarrow \mu_{\text{id}} = 1 \left] \right.$$

geplante
Lösung
 \rightsquigarrow
wird
abgelehnt

Ist $\deg(\mu_A) = 1$, so hat μ_A die Form $x - \lambda$ für ein $x \in K$. Da $\mu_A(A) = 0$, gilt also $A - \lambda I_n = 0$ und somit $A = \lambda I_n$.

Gilt $A = \lambda I_n$ für ein $\lambda \in K$, so gilt $A - \lambda I_n = 0$ sodass $\mu_A = x - \lambda$ Grad 1 hat.

(v)

Gilt $\deg(\mu_A) = n$, so erhalten wir $\lambda \mu_A = \chi_A$ für ein $\lambda \in K$, da χ_A nach dem Satz von Cayley-Hamilton und Satz 7.5.4 ein Vielfaches von μ_A ist und $\deg(\chi_A) = n$ gilt.

Definiert man χ_A als $\det(xI_n - A)$, so ist χ_A normiert, sodass aufgrund der Normiertheit von μ_A dann $\lambda = 1$ und somit $\mu_A = \chi_A$ gilt.

Andrerseits folgt aus $\mu_A = \chi_A$ offenbar $\deg(\mu_A) = n$.

→
eine von beiden nicht
natürlich als
Lösung

Definiert man χ_A als $\det(A - xI_n)$, so kann trotz gleichen Grades dennoch $\mu_A \neq \chi_A$ gelten:

$$\mu_{11} = x - 1, \quad \chi_A = 1 - x$$

$$(1) \in K^{n \times n}$$

Aufgabe 3

hier: $\chi_A = \det(xI_n - A)$

hier man auch analog

für $\chi_A = \det(A - xI_n)$ machen

Schreibe

Geht $a_0 = 0$,
so wäre 0
ein EW
von A

$\rightsquigarrow \lambda v = 0$
für ein
 $v \neq 0$

$$\chi_A = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in K[x]$$

mit $a_0 \neq 0$, da $A \in Gl_n(K)$. Nach dem Satz
von Cayley-Hamilton gilt nun

$$0 = \chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0,$$

sodass wir

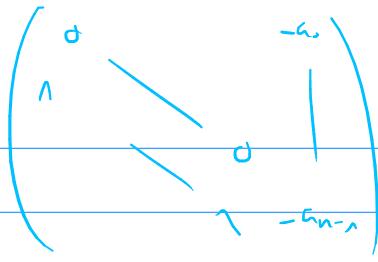
$$-a_0 = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A \quad \text{ex., da } a_0 \neq 0 \text{ s.d.}$$

erhalten. Multiplikation mit $-a_0^{-1}A^{-1}$ liefert nun

$$A^{-1} = -a_0^{-1}A^{n-1} - a_0^{-1}a_{n-1}A^{n-2} + \dots + -a_0^{-1}a_1I_n.$$

Aufgabe 4

(i)



Per Definition von A_f gilt

$$A_f \cdot e_i = \begin{cases} e_{i+n}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ -\sum_{j=1}^n a_{j-i} e_j, & i = n, \end{cases}$$

sodass wir

$$\overset{m}{A_f} \cdot e_1 = \begin{cases} e_{m+n}, & 1 \leq m \leq n-1 \\ -\sum_{j=1}^n a_{j-1} e_j, & m = n \end{cases}$$

erhalten. Somit sind $\overset{0}{A_f} \cdot e_n = I_n \cdot e_n, \dots, \overset{n-1}{A_f} \cdot e_n$ lin. unabhängig. Ist $g \in K(x)$ nun ein Polynom mit $g(A_f) \cdot e_n = 0$, so gilt also $\deg(g) \geq n$. Da

$$f(A_f) \cdot e_n = (\overset{n}{A_f} + a_{n-1} \overset{n-1}{A_f} + \dots + a_0 I_n) e_n$$

$$= \overset{n}{A_f} \cdot e_n + a_{n-1} \overset{n-1}{A_f} \cdot e_n + \dots + a_0 I_n \cdot e_n$$

$$\stackrel{S.0}{=} -\sum_{j=1}^n a_{j-1} e_j + a_{n-1} e_n + \dots + a_0 e_n$$

$$= 0,$$

ist f also ein Polynom minimalen Grades mit $f(A_f) \cdot e_n = 0$.

(ii)

Wissen bereits, dass $f(\lambda_f) \cdot e_1 = 0$. Nun gilt

$$f(\lambda_f) \cdot e_i \stackrel{s.o.}{=} f(\lambda_f) \cdot (\lambda_f^{i-1} \cdot e_1) = \lambda_f^{i-1} \cdot \underbrace{f(\lambda_f) \cdot e_1}_{=0} = 0$$

für alle $2 \leq i \leq n-1$.

(iii)

Da $f(\lambda_f) \cdot e_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, gilt

$f(\lambda_f) \cdot v = 0$ für jeden Vektor $v \in k^n$, da e_1, \dots, e_n eine Basis von k^n ist. Also ist $f(\lambda_f)$ die Nullmatrix. Da außerdem f minimal ist mit $f(\lambda_f) \cdot e_1 = 0$, ist f minimal mit $f(\lambda_f) = 0$ und somit das Minimalpolynom von λ_f (da f normiert ist).