

Lineare Algebra II

Blatt 5

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 17.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Jordanzerlegung für jede natürliche Zahl m die Potenz A^m in Abhängigkeit von m .

Aufgabe 3 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ stets ähnlich zu ihrer Transponierten $A^T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

- (i) Wir wollen uns überlegen, dass jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Quadratwurzel besitzt, d.h. eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $B^2 = A$.
 - (1) Zeigen Sie, dass es genügt die Aussage für einen Jordan-Block zu zeigen.
 - (2) Zu einem Jordan-Block J_λ zum Eigenwert λ betrachten wir nun den Jordan-Block $J_{\sqrt{\lambda}}$ derselben Größe zum Eigenwert $\sqrt{\lambda}$ für eine fest gewählte Quadratwurzel $\sqrt{\lambda}$ von λ . Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von $(J_{\sqrt{\lambda}})^2$.
 - (3) Nutzen Sie die im Teil (2) gefundene Jordan-Normalform um eine Quadratwurzel von J_λ zu finden.
- (ii) Gilt die Aussage aus Aufgabenteil (i) auch für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, wenn man $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ erlaubt?

Aufgabe 1

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} :$$

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 1 & x+2 & 2 \\ -2 & -4 & x-4 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(x-2)(x+2)(x-4)}_{x^2-4} + 8(x-2)$$

$$= x^3 - 4x - 4x^2 + 16 + 8x - 16$$

$$= x^3 - 4x^2 + 4x$$

$$= x \underbrace{(x^2 - 4x + 4)}$$

$$= (x-2)^2$$

$$= x(x-2)^2$$

Somit sieht die Jordan-Normalform bisher wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & ? \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen nun die Dimension des Eigenraumes von A zum Eigenwert 2, um die Anzahl der Jordan-Blöcke zum Eigenwert 2 herauszufinden:

Da

$$\operatorname{rk} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}}_{2I_3 - A} = 2,$$

gilt vermöge des Rangsatzes $\dim(\ker(2I_3 - A)) = 1$, sodass es einen Jordan-Block zum Eigenwert 2 gibt. Also ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Jordan-Normalform von A.

Aufgabe 2

Wir bestimmen zunächst die Jordan-Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det(xI_2 - A) = \det \begin{pmatrix} x+4 & 4 \\ -9 & x-8 \end{pmatrix} = (x+4)(x-8) + 36 \\ &= x^2 - 8x + 4x - 32 + 36 \\ &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x-2)^2\end{aligned}$$

Da

$$\text{rh} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}}_{2I_2 - A} = 1, \quad \text{Anzahl der Jordan-Sätze}$$



erhalten wir $\dim(\ker(2I_2 - x)) = 1$ und somit die Jordan-Normalform

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmen wir die Basiswechselmatrix:

Ist $S = (v_1 | v_2)$ die Basiswechselmatrix, so gelten

$$A \cdot v_1 = 2v_1 + 0v_2 = 2v_1$$

und

$$A \cdot v_2 = 1 \cdot v_1 + 2v_2.$$

Somit ist v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 2.

Vermöge

$$2I_2 - A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + \frac{3}{2}I} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gilt

$$\ker(2I_2 - A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 6x + 4y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -\frac{3}{2}x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wir können also $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ wählen. Nun bestimmen wir v_2 :

$$\begin{pmatrix} -4x - 4y \\ 5x + 8y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2x \\ -3+2y \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} -6x - 4y \\ 5x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das LGS:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -4 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{II + \frac{3}{2}I} \left(\begin{array}{cc|c} -6 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{I \cdot (-\frac{1}{6})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es muss also $x + \frac{2}{3}y = -\frac{1}{3}$ gelten. Wir können also $x = -1$ und $y = 1$ wählen.

Somit gilt $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ und wir erhalten

$$S^{-1} = \underbrace{-1}_{\det(S)^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
 A^m &= (SJ S^{-1})^m = SJ^m S^{-1} = S \left(\left(\begin{smallmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \right)^m S^{-1} \\
 &\quad \xrightarrow{\text{aufgrund der Jordan-Zerlegung gilt der binomische Lehrsatz auch hier}} = S \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \left(\begin{smallmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix} \right)^{m-i} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)^i \right) S^{-1} \\
 &\quad = 0 \text{ für } i \geq 2 \\
 &= S \left(\underbrace{\binom{m}{0} \left(\begin{smallmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix} \right)^m}_{= 1} + \underbrace{\binom{m}{1} \left(\begin{smallmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix} \right)^{m-1} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)}_{= m} \right) S^{-1} \\
 &= S \left(\left(\begin{smallmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{smallmatrix} \right) + m \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 2^{m-1} & 0 \\ 0 & 2^{m-1} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)}_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2^{m-1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)} \right) S^{-1} \\
 &= S \left(\left(\begin{smallmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{smallmatrix} \right) S^{-1} + S \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2^{m-1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) S^{-1} \right) \\
 &= \left(\begin{smallmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{smallmatrix} \right) \underbrace{S \cdot S^{-1}}_{= I_2} + S \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2^{m-1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{smallmatrix} \right) \\
 &= \left(\begin{smallmatrix} -3 \cdot 2^{m-1} & -2^m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \\
 &= \left(\begin{smallmatrix} -3 \cdot 2^{m-1} & -2^{m+1} \\ 0 \cdot 2^{m-1} & 3 \cdot 2^m \end{smallmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{smallmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{smallmatrix} \right) + \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} -3 \cdot 2^{m-1} & -2^m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)}_{\left(\begin{smallmatrix} -3 \cdot 2^{m-1} & -2^{m+1} \\ 0 \cdot 2^{m-1} & 3 \cdot 2^m \end{smallmatrix} \right)}$$

$$= \left(\begin{smallmatrix} -3 \cdot 2^{m-1} & -2^{m+1} \\ 0 \cdot 2^{m-1} & 3 \cdot 2^m \end{smallmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} (1-3m)2^m & -2m \cdot 2^m \\ \frac{9}{2}m \cdot 2^m & (1+3m)2^m \end{pmatrix}$$

$$= 2^m \begin{pmatrix} 1-3m & -2m \\ \frac{9}{2}m & 1+3m \end{pmatrix}.$$

stets bis auf Reihenfolge
der Jordan - Blöcke genügt

Aufgabe 3

Da zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ genau dann ähnlich sind, wenn sie die gleiche Jordan - Normalform haben, genügt es zu zeigen, dass A und A^T die gleiche Jordan - Normalform haben. Dafür zeigen wir:

(1) A und A^T haben die gleichen Eigenwerte

(2) Für jeden Eigenwert λ stimmt die Anzahl der Jordan - Blöcke zum Eigenwert λ überein.

(3) Für jeden Eigenwert λ stimmen die Block - Größen der Jordan - Blöcke zum Eigenwert λ überein.

(1):

Da

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \det((xI_n - A)^T) = \det(xI_n^T - A^T)$$

$$= \det(xI_n - A^T)$$

$$= \chi_{A^T}(x),$$

haben A und A^T die gleichen Eigenwerte.

(2) + (3):

dann dass
Dimensionen
legen die
Anzahl und
Größen der
Blöcke fest

Es genügt zu zeigen, dass die Dimensionen

$$\dim(\ker((\lambda I_n - A)^i)) \text{ und } \dim(\ker((\lambda I_n - A^T)^i))$$

für alle $i \geq 1$ übereinstimmen. Nun gilt

$$\dim(\ker((\lambda I_n - A)^i)) \stackrel{\text{Rang-}}{=} n - \operatorname{rk}((\lambda I_n - A)^i)$$

$$= n - \operatorname{rk}((\lambda I_n - A)^i)^T$$

$$= n - \operatorname{rk}((\lambda I_n - A^T)^i)$$

$$= n - \operatorname{rk}((\lambda I_n - A^T)^i)$$

$$\stackrel{\text{Rang-}}{=} \dim(\ker((\lambda I_n - A^T)^i)).$$

Somit haben A und A^T die gleichen Jordan-Normalformen.

Aufgabe 4

(i)

(1)

Sei

$$J_A = \begin{pmatrix} (\lambda_1^1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1) & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_l^1 & 0 \\ 0 & \lambda_l^1) \end{pmatrix}$$

die Jordan-Normalform von A mit Basiswechselmatrix S.
Ist nun β_{λ_i} eine Quadratwurzel von $(\lambda_i^1 & 0 \\ 0 & \lambda_i^1)$ für jedes $1 \leq i \leq l$, so gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \beta_{\lambda_2} \end{pmatrix}}_{= \mathfrak{B}^1}^2 = \begin{pmatrix} (\lambda_1^1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1) & 0 \\ 0 & (\lambda_2^1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^1) \end{pmatrix} = J_A = SAS^{-1}$$

und wir erhalten

$$(S^{-1}\mathfrak{B}^1 S)^2 = S^{-1}(\mathfrak{B}^1)^2 S = A.$$

Also besitzt A dann auch eine Quadratwurzel.

(2)

\mathfrak{D}_A

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \backslash\backslash & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 1 & 0 \\ & \backslash\backslash & 1 & \\ 0 & & 2\lambda & \lambda \\ & & & \lambda \end{pmatrix},$$

gilt $\chi_{J_\lambda^2} = (x - \lambda)^n$. Nun gilt

$$\text{ch} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2\lambda & -1 & 0 \\ & \backslash\backslash & -1 & \\ 0 & & -2\lambda & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{\lambda I_n - J_\lambda^2} = n-1,$$

sodass vermöge des Rangsatzes $\dim(\ker(\lambda I_n - J_\lambda^2)) = 1$ gilt. Somit ist die Jordan-Normalform von J_λ^2 durch

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \backslash\backslash & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = J_\lambda$$

gegeben.

(3)

Ist S die Basisumschmatrixt zur Jordan-Normalform J_λ von J_λ^2 , so gilt

$$(S^{-1} J_\lambda^2 S)^2 = S^{-1} J_\lambda^2 S = J_\lambda,$$

sodass $S^{-1} J_\lambda^2 S$ eine Quadratwurzel von J_λ ist.

(ii)

Nein, diese Verallgemeinerung der Aussage aus Teil (i) gilt nicht.

Zum Bsp hat die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ keine Quadratwurzel:

Ist $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so gilt $c=0$ oder $a+d=0$. Da $b(a+d)=1$, kann letzteres nicht sein. Gelten $c=0$ und $a^2+bc=0$, so erhalten wir $a=0$ und analog $d=0$. Somit gilt jedoch $0=ab+bd=1$. \square

Also hat A keine Quadratwurzel.