Lineare Algebra II
Blatt 4

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 10.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten den Endomorphismus f von $\mathbb{R}^2$, welcher durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie alle f-invarianten Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei K ein Körper. Bestimmen Sie für alle $1 \leq n \leq 4$ die maximale Anzahl von nilpotenten Matrizen in $K^{n\times n}$, welche paarweise nicht-ähnlich sind. Geben Sie dabei Beispiele von solchen Matrizen an.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei K ein Körper und seien $A, B \in K^{9\times 9}$ nilpotente Matrizen mit Nilpotenzgrad 5.

(i) Angenommen, es gilt $\dim(\ker(A)) = 5 = \dim(\ker(B))$. Sind A und B stets ähnlich?

(ii) Angenommen, es gilt $\dim(\ker(A^2)) = 5 = \dim(\ker(B^2))$. Sind A und B stets ähnlich?

Hinweis: Argumentieren Sie mit Jordan-Blöcken.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass alle Untervektorräume von V f-invariant sind genau dann, wenn f ein Vielfaches der Identitätsabbildung ist, also $f = \lambda \mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in K$ gilt.

Aufgabe 1

- 0-dim UVR: $U = \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$ ist f-invariant, da lineare Abbildungen stets 0 auf 0 abbilden

- 2-dim UVR: $U = \mathbb{R}^2$ ist per Definition von f als Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$ f-invariant

- 1-dim UVR: $U = \langle \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rangle$ mit $x \neq 0$ oder $y \neq 0$
Da

$$f(U) = f(\langle \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rangle) = \begin{cases} \langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle, & y \neq 0 \\ \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}, & y = 0 \quad (\rightsquigarrow U = \langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle) \end{cases},$$

ist U f-invariant genau dann, wenn $y = 0$ gilt (denn im Fall $y \neq 0$ müsste $\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle \subseteq \langle \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rangle$ mit $y \neq 0$ gelten).

Die f-invarianten UVR sind also

$$\underbrace{\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}}_{0\text{-dim}}, \quad \underbrace{\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle}_{1\text{-dim}}, \quad \underbrace{\mathbb{R}^2}_{2\text{-dim}}.$$

Aufgabe 2

Da zwei nilpotente Matrizen ähnlich sind genau dann, wenn ihr Jordan-Normalformen (bis auf Reihenfolge der Jordan-Blöcke) übereinstimmen, genügt es jeweils, die Anzahl der möglichen Jordan-Normalformen zu bestimmen. Wir geben nun anhand von Partitionen von n die möglichen Jordan-Normalformen an:

wieder bis auf Reihenfolge der Jordan-Blöcke

$n = 1: \quad (0)$

$\underset{1}{}$

Haben also eine mögliche Jordan-Normalform.

$$n = 2: \quad \underbrace{\begin{pmatrix} (0) & 0 \\ 0 & (0) \end{pmatrix}}_{1+1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{2}$$

Haben also zwei mögliche Jordan-Normalformen.

$$n = 3: \quad \underbrace{\begin{pmatrix} (0) & 0 & 0 \\ 0 & (0) & 0 \\ 0 & 0 & (0) \end{pmatrix}}_{1+1+1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & (0) \end{pmatrix}}_{2+1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3}$$

Haben also drei mögliche Jordan-Normalformen.

$$n = 4: \quad \underbrace{\begin{pmatrix} (0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0) \end{pmatrix}}_{1+1+1+1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} (0) & 0 \\ 0 & (0) \end{matrix} \end{pmatrix}}_{2+1+1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}}_{2+2}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & (0) \end{pmatrix}}_{3+1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{4}$$

Haben also fünf mögliche Jordan - Normalformen.

Aufgabe 3

Da zwei nilpotente Matrizen ähnlich sind genau dann, wenn ihr Jordan-Normalformen (bis auf Reihenfolge der Jordan-Blöcke) übereinstimmen, genügt es jeweils, die Anzahl der möglichen Jordan-Normalformen (bis auf Reihenfolge der Jordan-Blöcke) zu bestimmen.

(i)

Da $\dim(\ker(A)) = 5 = \dim(\ker(B))$, haben die Jordan-Normalformen von A und B beide genau fünf Jordan-Blöcke. Zudem besitzen die Jordan-Normalformen von A und B mindestens einen (5×5)-Jordan-Block und keine größeren Jordan-Blöcke, da 5 der Nilpotenzgrad von A und B ist. Somit sind die Jordan-Normalformen (bis auf Reihenfolge) von A und B durch

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} & & & & \\ & (0) & & & \\ & & (0) & & \\ & & & (0) & \\ & & & & (0) \end{pmatrix}$$

gegeben. Also sind solche A und B stets ähnlich.

(ii)

s_i = Anzahl der Jordan-Blöcke von Größe $\geq (i\times i)$

Wir wissen:

- $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_4 \geq s_5$
- $s_5 = 1$, $0 = s_6 = s_7 = \dots$

- $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 9$
- $s_1 + s_2 = 5$
- $0 \subsetneq \ker(A) \subsetneq \ker(A^2) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(A^5) = K^9$

Da wir die echten Inklusionen $0 \subsetneq \ker(A) \subsetneq \ker(A^2)$ haben und $\dim(\ker(A^2)) = 5$ gilt, erhalten wir

$$1 \leq \underbrace{s_1}_{= \dim(\ker(A))} \leq 4.$$

Da $s_1 \geq s_2$ und $s_1 + s_2 = 5$, können wir $s_1 = 1$ und $s_1 = 2$ ausschliessen.

Gilt $s_1 = 3$, so erhalten wir $s_2 = 2$, da $s_1 + s_2 = 5$. Da $s_1 + \_ + s_5 = 9$, muss also $s_3 + s_4 + \underbrace{s_5}_{=1} = 4$ gelten. Daher gilt $s_3 = 2$ und $s_4 = 1$, da $s_3 \geq s_4 \geq 1$ und $s_3 + s_4 = 3$ gelten. Die Jordan-Normalform ist dann also durch

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ 0 & & (0) \end{pmatrix}$$

gegeben.

Gilt $s_1 = 4$, so gilt $s_2 = 1$, da $s_1 + s_2 = 5$. Da $1 = s_2 \geq s_3 \geq s_4 \geq s_5 = 1$, erhalten wir also insgesamt

$s_1 = 4$ und $s_2 = \_ = s_5 = 1$ ↯ $s_1 + \_ + s_5 = 9$

Wir haben also gezeigt, dass solche A und B (bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke) nur eine mögliche Jordan-Normalform haben und somit ähnlich sind.

Aufgabe 4

„$\Leftarrow$": Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Gilt $f = \lambda \mathrm{Id}_V$ für ein $\lambda \in K$, so erhalten wir

$$f(U) = \{\lambda u \mid u \in U\} \subseteq U,$$

da U als UVR abg. unter Skalarmultiplikation ist.

„$\Rightarrow$": Müssen zeigen, dass ein $\lambda \in K$ ex. mir $f(v) = \lambda v$ für alle $v \in V$ gilt. Sei $v \in V$ und betrachte $U_v = \langle v \rangle$. Da jeder UVR von V f-inv. ist, gilt

$$f(U_v) \subset U_v = \langle v \rangle,$$

sodass ein $\lambda_v \in K$ ex. mit $f(v) = \lambda_v \cdot v$. Sei nun $w \in V$ ein weiterer Vektor. Dann erhalten wir analog ein $\lambda_w \in K$ mit $f(w) = \lambda_w \cdot w$. Wir zeigen nun, dass $\lambda_v = \lambda_w$ gilt. Dafür betrachten wir den Vektor $v+w$, zu welchem wir analog ein $\lambda_{v+w} \in K$ erhalten mit

$$f(v+w) = \lambda_{v+w} \cdot (v+w) = \lambda_{v+w} \cdot v + \lambda_{v+w} \cdot w.$$

Da f lin. ist, gilt aber

$$f(v+w) = f(v) + f(w) = \lambda_v \cdot v + \lambda_w \cdot w$$

und wir erhalten

$$(\lambda_{v+w} - \lambda_v) v + (\lambda_{v+w} - \lambda_w) w = 0.$$

Da $v, u \in V$ beliebig, gilt also $\lambda_v = \lambda_{v+u} = \lambda_u$.
Somit ex. ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \mathrm{Id}_V$.