

# Lineare Algebra II

## Blatt 2

HHU Düsseldorf, SoSe 21

**Abgabe bis Montag, 26.04.2021, 10:15 Uhr, im Ilias**



Auf dem gesamten Übungblatt steht  $\mathbb{K}$  für den Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  oder den Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ .

---

**Aufgabe 1 (5 Punkte):** Bestimmen Sie reelle Zahlen  $a$  und  $b$  so, dass die durch

$$24x^2 - 12xy + 8y^2 = 6$$

definierte Kurve im  $\mathbb{R}^2$  nach einer orthogonalen Abbildung durch eine Gleichung der Form  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  beschrieben werden kann, also eine Ellipse darstellt.

**Aufgabe 2 (5 Punkte):** Im Beweis von Satz 6.4.5 haben wir die zu zeigende Aussage nur im Spezialfall  $V = \mathbb{C}^n$  gezeigt und dann auf Satz 6.2.7 verwiesen. Formulieren Sie aus, wie man mit Satz 6.2.7 auf den Fall  $V = \mathbb{C}^n$  reduziert.

**Aufgabe 3 (5 Punkte):** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (i)  $(f + g)^* = f^* + g^*$  für alle  $f, g \in \text{End}(V)$ .
- (ii)  $(\lambda f)^* = \lambda f^*$  für alle  $f \in \text{End}(V)$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
- (iii)  $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$  für alle  $f, g \in \text{End}(V)$ .
- (iv)  $f^{-1}(U^\perp) = f^*(U)^\perp$  für alle  $f \in \text{End}(V)$  und alle Untervektorräume  $U \subseteq V$ .
- (v)  $\text{rk}(f) = \text{rk}(f^*)$  für alle  $f \in \text{End}(V)$ .

**Aufgabe 4 (5 Punkte):** Sei  $K$  ein Körper, sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und sei  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  eine Bilinearform. Man nennt die Bilinearform  $f$  nicht-entartet, falls die Abbildung

$$h(f): V \rightarrow \text{Hom}(V, K), v \mapsto (w \mapsto f(v, w))$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

- (i) Die Bilinearform  $f$  ist nicht-entartet.
- (ii) Gilt  $f(v, w) = 0$  für alle  $w \in V$ , so folgt  $v = 0$ .
- (iii) Es existiert eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$ , sodass die zu  $f$  assoziierte Matrix  $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  invertierbar ist.
- (iv) Für jede Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  ist die zu  $f$  assoziierte Matrix  $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  invertierbar.

# Aufgabe 1

Zunächst gilt

$$24x^2 - 12xy + 8y^2 = 6.$$

$$= (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \underbrace{\begin{pmatrix} 24 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Definiere nun die symmetrische Bilinearform

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix})) \mapsto (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) A (\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}).$$

Nach Satz 6.6.5 bzw. Korollar 6.6.6 existiert nur eine ONB  $v_1, v_2$  aus Eigenvektoren von  $A$ , d.h. die Matrix  $S = (v_1 | v_2)$  ist orthogonal und

$$S^{-1}AS = S^TAS = \mathbb{D}$$

mit den Eigenwerten  
auf der Diagonale

ist eine reelle Diagonalmatrix. Wir bestimmen nun die Eigenwerte von  $A$ , also die Diagonaleinträge von  $\mathbb{D}$ :

$$\chi_A(\tau) = \det(\tau I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \tau - 24 & 6 \\ 6 & \tau - 8 \end{pmatrix}$$

$$= (\tau - 24)(\tau - 8) - 36$$

$$= \tau^2 - 32\tau + 192 - 36$$

$$\text{pq-Formel liefert Nullstellen}$$

$$\frac{32}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{32}{2}\right)^2 - 156} = T^2 - 32T + 156$$

$$= (T-6)(T-26)$$

$$= 16 \pm \sqrt{100}$$

$$= 16 \pm 10$$

Stellen wir nun

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda v_1 + \mu v_2 \quad (= S \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix})$$

in der Basis  $v_1, v_2$  dar, so erhalten wir

$$6 = 24x^2 - 12xy + 8y^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (S \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix})^T A (S \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix})$$

o.E. ist  $v_1$  Eigenvektor  
zum Eigenwert 6 und  
 $v_2$  zum Eigenwert 26  
(anschließend schreibe  $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$ )

$$= (\lambda \mu) \underbrace{S^T A S}_{=\mathbb{D}} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda \mu) \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= 6\lambda^2 + 26\mu^2$$

also

$$1 = \lambda^2 + \frac{13}{3}\mu^2 = \underbrace{\frac{\lambda^2}{\lambda^2}}_{=a} + \underbrace{\frac{\mu^2}{\frac{13}{3}\mu^2}}_{=b}.$$

## Aufgabe 2

Sei  $f \in \text{End}(V)$ . Nach Satz 6.2.7 existiert ein Isomorphismus  $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow V$  mit  $\langle \varphi(u), \varphi(u') \rangle = \langle u, u' \rangle$  für alle  $u, u' \in \mathbb{C}^n$ . Betrachte nun die Verkettung  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Hatten in der Vorlesung geschrieben, dass  $\varphi$  ein Endomorphismus von  $\mathbb{C}^n$  eine eindeutige Adjungierte besitzt, sodass wir  $(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)^*$  betrachten können.

Behauptung:  $\varphi \circ (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)^* \circ \varphi^{-1}$  ist eine Adjungierte von  $f$ .

Seien  $v, v' \in V$ . Da  $\varphi$  ein Isomorphismus ist, existieren eindeutige  $u, u' \in \mathbb{C}^n$  mit  $\varphi(u) = v$  und  $\varphi(u') = v'$ . Nun erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle f(v), v' \rangle &= \langle f \circ \varphi(u), \varphi(u') \rangle \stackrel{6.2.7}{=} \langle \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(u), u' \rangle \\ &= \langle u, (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)^*(u') \rangle \\ &= \langle \varphi^{-1}(v), (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)^* \circ \varphi^{-1}(v') \rangle \\ &\stackrel{6.2.7}{=} \langle v, \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)^* \circ \varphi^{-1}(v') \rangle. \end{aligned}$$

Somit bleibt zu zeigen, dass diese Adjungierte eindeutig ist.  
Seien  $g$  und  $g'$  Adjungierte von  $f$ , d.h. es gilt

$$\langle v, g(u) \rangle = \langle f(v), u \rangle = \langle v, g'(u) \rangle$$

für alle  $v, w \in V$ . Dann sind auch  $\varphi^{-1}g \circ \varphi$  und  $\varphi^{-1} \circ g' \circ \varphi$  Adjungierte von  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  (zeigen wir exemplarisch für  $g$ ):

Seien  $u, u' \in \mathbb{C}^n$  und sei  $v$  bzw.  $v'$  das Bild von  $u$  bzw.  $u'$  unter dem Isomorphismus  $\varphi$ . Dann gilt

$$\langle \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(u), u' \rangle = \langle \varphi^{-1} \circ f \circ \underbrace{\varphi \circ \varphi^{-1}(v)}_{= \text{Id}}, \varphi^{-1}(v') \rangle$$

$$= \langle \varphi^{-1} \circ f(v), \varphi^{-1}(v') \rangle$$

$$\stackrel{\text{wegen } \varphi}{=} \langle f(v), v' \rangle$$

an; 6.2.7

$$= \langle v, g(v') \rangle$$

$$\stackrel{6.2.7}{=} \langle \varphi(u), g \circ \varphi(u') \rangle$$

$$\stackrel{6.2.7}{=} \langle u, \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi(u') \rangle.$$

Da wir aus der Vorlesung bereits wissen, dass Adjungierte von Endomorphismen auf  $\mathbb{C}^n$  eindeutig sind, erhalten wir also  $\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ g' \circ \varphi$  und somit  $g = g'$  (verhetze mit  $\varphi^{-1}$  und  $\varphi$ ).

## Aufgabe 3

(i) ist wahr, denn es gilt

$$\begin{aligned}
 \langle (f+g)(v), u \rangle &= \langle f(v) + g(v), u \rangle \stackrel{31}{=} \langle f(v), u \rangle + \langle g(v), u \rangle \\
 &= \langle v, f^*(u) \rangle + \langle v, g^*(u) \rangle \\
 &\stackrel{37}{=} \langle v, f^*(u) + g^*(u) \rangle \\
 &= \langle v, (f^* + g^*)(u) \rangle
 \end{aligned}$$

für alle  $v, u \in V$ .

(ii) ist nicht wahr

Betrachte  $V = \mathbb{C}^n$ . Dann ist die Adjungierte einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  durch die Matrix  $\bar{A}^T$  gegeben und somit gilt

$$(\lambda A)^* = (\overline{\lambda A})^T = \bar{\lambda} \bar{A}^T = \bar{\lambda} A^*$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  gilt also

$$(\lambda A)^* \neq \lambda A^*$$

(Ein konkretes Isp wäre also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ und } \lambda = i$$

$$\sim (\lambda A)^* = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \neq i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda A^*$$

(iii) iA nicht wahr

Betrachte  $V = \mathbb{C}^n$  und Matrizen  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

Dann gilt

$$(AB)^* = (\overline{AB})^\top = \overline{B}^\top \overline{A}^\top = B^* A^*.$$

Sind also  $A$  und  $B$  zwei Matrizen, sodass  $\overline{A}^\top \overline{B}^\top \neq \overline{B}^\top \overline{A}^\top$ , so gilt folglich  $(AB)^* \neq A^* B^*$ .

Ein konkretes Bsp ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ ; & 0 \end{pmatrix} \text{ gegeben:}$$

$$\overline{B}^\top \overline{A}^\top = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}^\top \overline{B}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

(iv) ist wahr, dann

$$f^{-1}(U^\perp) = f^{-1}(\{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\})$$

$$= \{v \in V \mid \langle f(v), u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

$$= \{v \in V \mid \langle v, f^*(u) \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

$$= \{v \in V \mid \langle v, v' \rangle = 0 \text{ für alle } v' \in f^*(u)\}$$

$$= f^*(U)^\perp.$$

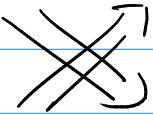
(v) ist wahr

Für  $V = \mathbb{K}^n$  stimmt die Aussage, da der Zeilenrang einer Matrix stets dem Spaltenrang entspricht und komplexe Konjugation nichts am Rang ändert. Für einen beliebigen Unterraum  $V$  folgt die Aussage durch Verwenden der Konstruktion der Adjungierten (siehe Aufgabe 1), da Isomorphismen den Rang nicht ändern.

## Aufgabe 4

Werden

$$(i) \Leftrightarrow (ii)$$



$$(iii) \Leftrightarrow (iv)$$

zeigen.

$(i) \Rightarrow (ii)$ :

Ist  $f$  nicht-entartet, also  $h(f)$  ein Isomorphismus, so gilt  $\text{ker}(h(f)) = \{0\}$ . Da

$$\text{ker}(h(f)) = \{v \in V \mid h(f)(v) = 0\}$$

$$= \{v \in V \mid f(v, u) = 0 \text{ für alle } u \in V\},$$

folgt also (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$ :

Haben gerade gesehen, dass (ii) aussagt, dass  $\text{ker}(h(f)) = \{0\}$  gilt. Da  $\text{Hom}(V, k)$  isomorph zu  $k^{1 \times n}$  ist, ist  $h(f)$  eine injektive lin. Abbildung zwischen zwei  $n$ -dim. Vektorräumen und somit bereits ein Isomorphismus.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv):

Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ , sodass  $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  invertierbar ist und sei  $w_1, \dots, w_n \in V$  eine beliebige Basis. Schreibe  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ . Wir betrachten die Isomorphismen

$$\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V, \quad (\begin{smallmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{smallmatrix}) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

und

$$\varphi_{\mathcal{B}'} : K^n \rightarrow V, \quad (\begin{smallmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{smallmatrix}) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i.$$

Ist nun  $M$  die Basiswechselmatrix von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$ , so gilt

$$\begin{aligned} f(v_i, v_j) &= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)^T (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \varphi_{\mathcal{B}'}^{-1}(v_j) \\ &= (M \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i))^T (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} (M \varphi_{\mathcal{B}'}^{-1}(v_j)) \\ &= \varphi_{\mathcal{B}'}^{-1}(v_i)^T M^T (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} M \varphi_{\mathcal{B}'}^{-1}(v_j) \end{aligned}$$

Somit ist die Matrix von  $f$  bzgl. der Basis  $\mathcal{B}'$  durch

$M^T (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} M$  gegeben und somit als Produkt invertierbarer Matrizen invertierbar.

(iv)  $\Rightarrow$  (iii):

Ist  $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  für jede Basis  $v_1, \dots, v_n \in V$  invertierbar, so existiert sicherlich auch eine solche, da jeder Unterraum

eine Basis besitzt.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii):

Angenommen es gilt  $f(v, w) = 0$  für alle  $w \in V$ . Zu zeigen:  $v = 0$

Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  so, dass  $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  invertierbar ist. Skalar

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

und

$$w = \sum_{j=1}^n \mu_j(w) v_j$$

in der Basis  $v_1, \dots, v_n$  dar. Dann erhalten wir

$$0 = f(v, w) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j(w) v_j\right)$$

$$\stackrel{\text{d.h.}}{=} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_i \mu_j f(v_i, v_j)$$

$$= (\lambda_1, \dots, \lambda_n) (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \begin{pmatrix} \mu(w) \\ \vdots \\ \mu(w) \end{pmatrix}.$$

Da  $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  invertierbar ist und  $\varphi: K^n \rightarrow V$ ,

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i$  ein Isomorphismus ist, können wir

Vektoren  $w_1, \dots, w_n$  wählen so, dass

$$(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \begin{pmatrix} m(v_k) \\ \vdots \\ m(v_1) \end{pmatrix} = e_n \in K^n$$

für alle  $1 \leq h \leq n$  gilt. Somit gilt dann

$$0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \underbrace{(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}}_{e_n} w_h = \lambda_h$$

für alle  $1 \leq h \leq n$ , sodass  $v = 0$ .

,(i)  $\Rightarrow$  (iv):

Sei  $f$  nicht-entartet, also  $h(f)$  ein Isomorphismus.

Sei darüberhinaus  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$ . Angenommen, die Matrix  $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  ist nicht invertierbar. Da  $\text{rk}(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} = \text{rk}(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ , existieren somit Vektoren  $v, v' \in V$  mit  $v \neq v'$ , sodass

$$(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}^T \varphi_\beta^{-1}(v) = 0 = (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}^T \varphi_\beta^{-1}(v')$$

gilt, wobei  $\varphi_\beta: K^n \rightarrow V$ ,  $(\begin{smallmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i$ . Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} h(f)(v) &= (\cup \cup f(v, \cdot)) = \underbrace{\varphi_\beta^{-1}(v)^T (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \varphi_\beta^{-1}(\cdot)}_{= (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}^T \varphi_\beta^{-1}(v)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(f)(v') &= (\cup \cup f(v, \cdot)) = \underbrace{\varphi_\beta^{-1}(v')^T (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \varphi_\beta^{-1}(\cdot)}_{= (f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}^T \varphi_\beta^{-1}(v')} = 0 \end{aligned}$$

da  $h(f)$  Isomorphismus.