

Lineare Algebra II

Blatt 13

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 12.07.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten die Tensoralgebra $T(\mathbb{R}^3)$ und die beiden Elemente $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T(\mathbb{R}^3)$, welche durch

$$v_0 = 1, v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, 2, 0) \otimes (0, 1, 0) - (1, -2, 0) \otimes (0, 1, 1), v_n = 0 \text{ für alle } n \geq 3$$

und

$$v'_0 = -1, v'_1 = (-1, 3, 0), v'_2 = 0, v'_3 = (2, 0, 0) \otimes (2, 1, 0) \otimes (3, 2, 1), v'_n = 0 \text{ für alle } n \geq 4$$

gegeben sind.

- (i) Berechnen Sie das Produkt $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (v'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T(\mathbb{R}^3)$.
- (ii) Stellen Sie den Vektor $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Linearkombination der endlichen Produkte der Standardbasisvektoren dar (vgl. Satz 8.6.7).

Aufgabe 2 (5 Punkte): Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 8.6.10 der "Tafelanschriften", d.h. rechnen Sie nach, dass die Abbildung

$$\varphi: K[x] \rightarrow A, \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \tilde{\varphi}(x)^i$$

tatsächlich ein Homomorphismus von K -Algebren ist, wobei A eine kommutative K -Algebra und $\tilde{\varphi}: \{x\} \rightarrow A$ eine Abbildung ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Beweisen Sie Satz 8.6.11 der "Tafelanschriften", d.h. beweisen Sie, dass sich jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow A$ von einem K -Vektorraum V in eine K -Algebra A eindeutig zu einem Homomorphismus $\tilde{f}: T(V) \rightarrow A$ von K -Algebren fortsetzen lässt.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Realisieren Sie die \mathbb{R} -Algebra \mathbb{C} als Quotient von der \mathbb{R} -Algebra $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$, d.h. finden Sie ein Ideal $U \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, sodass der Quotient $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/U$ als \mathbb{R} -Algebra isomorph zu \mathbb{C} ist.

Hinweis: Verwenden Sie z.B. den Isomorphiesatz aus Bemerkung 8.6.17 zusammen mit Satz 2.3.8.

Aufgabe 1

(i)

Es gelten

$$\omega_0 = v_0 \otimes v_0' = 1 \otimes (-1) = -1,$$

$$\omega_1 = v_0 \otimes v_1' + v_1 \otimes v_0' = 1 \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes (-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= v_0 \otimes \underbrace{v_2'}_{=0} + v_1 \otimes v_1' + v_2 \otimes v_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \otimes (-1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_3 &= v_0 \otimes v_3' + v_1 \otimes \underbrace{v_2'}_{=0} + v_2 \otimes v_1' + \underbrace{v_3 \otimes v_0'}_{=0} \\ &= 1 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_4 &= v_0 \otimes \underbrace{v_4'}_{=0} + v_1 \otimes v_3' + v_2 \otimes v_2' + \underbrace{v_3 \otimes v_1'}_{=0} + \underbrace{v_4 \otimes v_0'}_{=0} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_5 &= v_0 \otimes v_5' + v_1 \otimes v_4' + v_2 \otimes v_3' + \underbrace{v_3 \otimes v_2'}_{=0} + \underbrace{v_4 \otimes v_1'}_{=0} + \underbrace{v_5 \otimes v_0'}_{=0} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$u_n = 0 \text{ für alle } n \geq 6,$$

da jeder Summand von u_n mindestens einen Faktor v_n mit $n \geq 3$ oder v_n' mit $n \geq 4$ enthält. Somit haben wir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vollständig berechnet.

(ii)

Schreibe e_{i_1, \dots, i_m} für $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}$ für alle $1 \leq m \leq 3$ und $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq 3$. Zudem fassen wir ein Element $v \in (\mathbb{R}^3)^{\otimes n}$ vor-
möge der Inklusion $(\mathbb{R}^3)^{\otimes n} \rightarrow T(\mathbb{R}^3)$ in den n -ten direkten
Summanden als Element in $T(\mathbb{R}^3)$ auf.

Wir erhalten

$$u_0 = -1 = (-1) \cdot 1,$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2e_1 + 3e_2 - e_3,$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (e_1 + e_3) \otimes ((-e_1) + 3e_2) - (2e_1 + 2e_2) \otimes e_2 + (e_1 - 2e_2) \otimes (e_2 + e_3)$$

$$= -e_{1,1} + 3e_{1,2} - e_{3,1} + 3e_{3,2} - 2e_{1,2} - 2e_{2,2} + e_{1,2} + e_{1,3} - 2e_{2,2} - 2e_{2,3}$$

$$= -e_{1,1} + 2e_{1,2} + e_{1,3} - 4e_{2,2} - 2e_{2,3} - e_{3,1} + 3e_{3,2},$$

$$\begin{aligned}
w_3 &= \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}_{=} + \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}_{=} - \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}_{=} \\
&= 2e_1 \otimes (2e_1 + e_2) \otimes (3e_1 + 2e_2 + e_3) + (2e_1 + 2e_2) \otimes e_2 \otimes (-e_1 + 3e_2) \\
&\quad - (e_1 - 2e_2) \otimes (e_2 + e_3) \otimes (-e_1 + 3e_2) \\
&= 12e_{1,1,1} + 8e_{1,1,2} + 4e_{1,1,3} + 6e_{1,2,1} + 4e_{1,2,2} + 2e_{1,2,3} - 2e_{1,2,1} + 6e_{1,2,2} \\
&\quad - 2e_{2,2,1} + 6e_{2,2,2} + e_{1,2,1} - 3e_{1,2,2} + e_{1,2,3} - 3e_{1,2,2} - 2e_{1,2,1} + 6e_{1,2,2} \\
&\quad - 2e_{2,3,1} + 6e_{2,3,2} \\
&= 12e_{1,1,1} + 8e_{1,1,2} + 4e_{1,1,3} + 5e_{1,2,1} + 7e_{1,2,2} + 2e_{1,2,3} + e_{1,2,1} - 3e_{1,2,2} - 4e_{1,2,1} \\
&\quad + 12e_{2,2,2} - 2e_{2,2,1} + 6e_{2,3,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_4 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = (e_1 + e_3) \otimes 2e_1 \otimes (2e_1 + e_2) \otimes (3e_1 + 2e_2 + e_3) \\
&= 12e_{1,1,1,1} + 8e_{1,1,1,2} + 4e_{1,1,1,3} + 6e_{1,1,1,1} \\
&\quad + 4e_{1,1,2,2} + 2e_{1,1,2,3} + 12e_{1,1,1,1} + 8e_{1,1,1,2} \\
&\quad + 4e_{1,2,1,3} + 6e_{1,2,1,1} + 4e_{1,2,1,2} + 2e_{1,2,1,2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
w_5 &= \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\
&= \underbrace{(2e_1 + 2e_2) \otimes e_2}_{=} \otimes 2e_1 \otimes (2e_1 + e_2) \otimes (3e_1 + 2e_2 + e_3) - (e_1 - 2e_2) \otimes (e_2 + e_3) \\
&\quad \otimes 2e_1 \otimes (2e_1 + e_2) \otimes (3e_1 + 2e_2 + e_3) \\
&= \left\{ \begin{aligned}
&24e_{1,2,1,1,1} + 16e_{1,2,1,1,2} + 8e_{1,2,1,1,3} + 12e_{1,2,1,2,1} + 8e_{1,2,1,2,2} + 4e_{1,2,1,2,3} \\
&+ 24e_{2,2,1,1,1} + 16e_{2,2,1,1,2} + 8e_{2,2,1,1,3} + 12e_{2,2,1,2,1} + 8e_{2,2,1,2,2} + 4e_{2,2,1,2,3} \\
&- 12e_{1,1,1,1,1} - 8e_{1,1,1,1,2} - 4e_{1,1,1,1,3} - 6e_{1,1,2,1,1} - 4e_{1,1,2,1,2} - 2e_{1,1,2,1,3} \\
&- 12e_{1,1,1,1,1} - 8e_{1,1,1,1,2} - 4e_{1,1,1,1,3} - 6e_{1,1,2,1,1} - 4e_{1,1,2,1,2} - 2e_{1,1,2,1,3} \\
&+ 24e_{1,2,1,1,1} + 16e_{1,2,1,1,2} + 8e_{1,2,1,1,3} + 12e_{1,2,1,2,1} + 8e_{1,2,1,2,2} + 4e_{1,2,1,2,3} \\
&+ 24e_{1,3,1,1,1} + 16e_{1,3,1,1,2} + 8e_{1,3,1,1,3} + 12e_{1,3,1,2,1} + 8e_{1,3,1,2,2} + 4e_{1,3,1,2,3}
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 12e_{1,2,1,1,1} + 8e_{1,2,1,1,2} + 4e_{1,2,1,1,3} + 6e_{1,2,1,2,1} + 4e_{1,2,1,2,2} + 2e_{1,2,1,2,3} \\
&- 12e_{1,3,1,1,1} - 8e_{1,3,1,1,2} - 4e_{1,3,1,1,3} - 6e_{1,3,1,2,1} - 4e_{1,3,1,2,2} - 2e_{1,3,1,2,3} \\
&+ 48e_{2,2,1,1,1} + 32e_{2,2,1,1,2} + 16e_{2,2,1,1,3} + 24e_{2,2,1,2,1} + 16e_{2,2,1,2,2} + 8e_{2,2,1,2,3} \\
&+ 24e_{2,3,1,1,1} + 16e_{2,3,1,1,2} + 8e_{2,3,1,1,3} + 12e_{2,3,1,2,1} + 8e_{2,3,1,2,2} + 4e_{2,3,1,2,3}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (-1) \cdot 1 - 2e_1 + 3e_2 - e_3 - e_{1,1} + 2e_{1,2} + e_{1,3} - 4e_{2,2} - 2e_{2,3} \\
&- e_{3,1} + 3e_{3,2} + 12e_{1,1,1} + 8e_{1,1,2} + 4e_{1,1,3} + 5e_{1,2,1} + 7e_{1,2,2} + 2e_{1,2,3} \\
&+ e_{1,3,1} - 3e_{1,3,2} - 4e_{2,1,1} + 12e_{2,1,2} - 2e_{2,1,3} + 6e_{2,2,2} + 12e_{1,1,1,1} + 8e_{1,1,1,2} \\
&+ 4e_{1,1,1,3} + 6e_{1,1,2,1} + 4e_{1,1,2,2} + 2e_{1,1,2,3} + 12e_{1,1,3,1} + 8e_{1,1,3,2} + 4e_{1,1,3,3} \\
&+ 6e_{1,2,1,2,1} + 4e_{1,2,1,2,2} + 2e_{1,2,1,2,3} + 12e_{1,2,1,3,1} + 8e_{1,2,1,3,2} + 4e_{1,2,1,3,3} \\
&+ 6e_{1,2,2,1,1} + 4e_{1,2,2,1,2} + 2e_{1,2,2,1,3} - 12e_{1,2,2,2,1} - 8e_{1,2,2,2,2} - 4e_{1,2,2,2,3} \\
&- 6e_{1,2,3,1,2,1} - 4e_{1,2,3,1,2,2} - 2e_{1,2,3,1,2,3} + 48e_{2,2,1,1,1} + 32e_{2,2,1,1,2} + 16e_{2,2,1,1,3} \\
&+ 24e_{2,2,1,2,1} + 16e_{2,2,1,2,2} + 8e_{2,2,1,2,3} + 24e_{2,3,1,1,1} + 16e_{2,3,1,1,2} + 8e_{2,3,1,1,3} \\
&+ 12e_{2,3,1,2,1} + 8e_{2,3,1,2,2} + 4e_{2,3,1,2,3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Zunächst einmal ist φ die lineare Fortsetzung der Abbildung
 $x^i \mapsto \tilde{\varphi}(x^i)$ auf der Basis $x^i, i \in \mathbb{N}$ von $K(x)$ und somit
linear. Da zudem

$$\varphi(x^i \cdot x^j) = \varphi(x^{i+j}) = \tilde{\varphi}(x^{i+j}) = \tilde{\varphi}(x^i) \tilde{\varphi}(x^j) = \varphi(x^i)\varphi(x^j)$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt und zudem offenbar $\varphi(1) = 1$ gilt, ist φ
nach Bemerkung 8.6.5 ein Isomorphismus von K -Algebren.

Aufgabe 3

Sei $f: V \rightarrow A$ eine lineare Abbildung von einem K -Vektorraum V in eine K -Algebra A . Wir definieren lineare Abbildungen

$$f_0: K \rightarrow A, \lambda \mapsto \lambda \cdot 1$$

und

$$f_n: V^{\otimes n} \rightarrow A$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ durch die multilinearen Abbildungen

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ mal}} \rightarrow A, (v_1, \dots, v_n) \mapsto f(v_1) \cdot \dots \cdot f(v_n). \text{ Vermöge der universellen}$$

$$\tilde{f} = (f_0, f_1, \dots)$$

Eigenschaft der direkten Summe $T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ erhalten wir
↓ dann eine lineare Abbildung $\tilde{f}: T(V) \rightarrow A$ mit $\tilde{f}|_{V^{\otimes n}} = f_n$
 für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $f_0 = f_1$ ist \tilde{f} schon einmal eine Fortsetzung
 von f auf $T(V)$. Bleibt zu zeigen, dass \tilde{f} ein Homomorphismus
 von K -Algebren ist. Da $\tilde{f}(1) = f_0(1) = 1$, müssen wir nur noch
 die Multiplikativität überprüfen. Sei dafür $(v_i)_{i \in I}$ ein Basis von V ,
 sodass die endlichen Produkte $v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_r}, r \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_r \in I$ eine Basis
 von $T(V)$ sind. Nun gilt

$$\tilde{f}((v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_r})(v_{j_1} \cdot \dots \cdot v_{j_s})) = \tilde{f}(v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_r} \cdot v_{j_1} \cdot \dots \cdot v_{j_s})$$

$$= f_{r+s}(v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_r} \cdot v_{j_1} \cdot \dots \cdot v_{j_s})$$

$$= f(v_{i_1}) \cdot \dots \cdot f(v_{i_r}) \cdot f(v_{j_1}) \cdot \dots \cdot f(v_{j_s})$$

$$= f_r(v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_r}) f_s(v_{j_1} \cdot \dots \cdot v_{j_s})$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_r}) \tilde{f}(v_{j_1} \cdot \dots \cdot v_{j_s})$$

für zwei solche Basiselemente, sodass \tilde{f} nach Bemerkung 8.6.9 multiplikativ ist. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass \tilde{f} ein Homomorphismus von \mathbb{U} -Algebren ist.

Eindeutigkeit: Sind \tilde{f} und \tilde{f}' zwei solche Fortsetzungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{f}(v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_r}) &= \tilde{f}(v_{i_1}) \cdot \dots \cdot \tilde{f}(v_{i_r}) = f(v_{i_1}) \cdot \dots \cdot f(v_{i_r}) = \tilde{f}'(v_{i_1}) \cdot \dots \cdot \tilde{f}'(v_{i_r}) \\ &= \tilde{f}'(v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_r})\end{aligned}$$

für alle Basiselemente $v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_r} \in T(V)$. Somit stimmen \tilde{f} und \tilde{f}' überein.

Aufgabe 4

Betrachtung: $\mathbb{R}(x)/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$ als \mathbb{R} -Algebren

Betrachte den Homomorphismus $\varphi: \mathbb{R}(x) \rightarrow \mathbb{C}$ von \mathbb{R} -Algebren, definiert durch $x \mapsto i$, via der universellen Eigenschaft des Polynomrings $\mathbb{R}(x)$. Es gilt also $\varphi(f) = f(i)$ für ein Polynom $f \in \mathbb{R}(x)$. Da $i^2 + 1 = 0$, gilt $x^2 + 1 \in \ker(\varphi)$ und somit $(x^2 + 1) \subseteq \ker(\varphi)$. Sei nun $f \in \ker(\varphi)$, d.h. es gilt $f(i) = 0$. Dann gilt auch

$$f(-i) = f(i) = \overline{f(i)} = \overline{0} = 0,$$

sodass sowohl i als auch $-i$ Nullstellen von f in \mathbb{C} sind. Betrachten wir also $f \in \mathbb{R}(x) \subset \mathbb{C}(x)$, so existiert nach Satz 2.3.8 ein Polynom $g \in \mathbb{C}(x)$ mit $f = g(x^2 + 1)$. Da sowohl f als auch $x^2 + 1$ in $\mathbb{R}(x)$ liegen, muss nun aber auch g in $\mathbb{R}(x)$ liegen, sodass wir $f \in (x^2 + 1)$ erhalten. Also gilt $\ker(\varphi) = (x^2 + 1)$ und der Isomorphiesatz/Homomorphiesatz liefert einen Isomorphismus

$$\mathbb{R}(x)/(x^2+1) \xrightarrow{\cong} \text{im}(\varphi) = \mathbb{C}$$

\hookrightarrow

$$z = a + bi = \varphi(a + xb)$$

von \mathbb{R} -Algebren.