

Lineare Algebra II

Blatt 12

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 05.07.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten die beiden linearen Abbildungen $f_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, welche durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

- (i) Geben Sie die darstellende Matrix $A \otimes B$ von $f_A \otimes f_B: \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basen von $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^4$ an, welche aus den Tensorprodukten der jeweiligen Standardbasisvektoren bestehen (hier wird implizit für die Basis des Tensorproduktes eine Reihenfolge gewählt. Diese Reihenfolge sollte dann bei allen Aufgaben mit Tensorprodukten von Matrizen beibehalten werden (Aufgaben 1 und 2)).
- (ii) Bestimmen Sie die (1×3) -Blockmatrix $\begin{pmatrix} 1 \cdot B & 0 \cdot B & 3 \cdot B \end{pmatrix}$. Fällt Ihnen etwas auf?
- (iii) Berechnen Sie mit Hilfe Ihrer Beobachtung aus dem vorherigen Aufgabenteil die Matrix $B \otimes A$. Gilt $A \otimes B = B \otimes A$?

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei K ein Körper und seien A, B, C und D vier Matrizen mit Einträgen aus K . Zeigen oder widerlegen Sie:

- (i) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$, falls die Produkte AC und BD definiert sind.
- (ii) $(A \otimes B)^T = B^T \otimes A^T$.
- (iii) $\det(A \otimes B) = (\det(A)\det(B))^{mn}$, falls $A \in K^{n \times n}$ und $B \in K^{m \times m}$.
- (iv) $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$, falls $A \in K^{n \times n}$ und $B \in K^{m \times m}$.
- (v) $(A \otimes B)^{-1} = B^{-1} \otimes A^{-1}$, falls A und B invertierbar sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Seien V_1, \dots, V_n und W Vektorräume über einem Körper K .

- (i) Präzisieren Sie die Aussage aus Bemerkung 8.4.12, also die Aussage, dass multilinear Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ genau den linearen Abbildungen $V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W$ entsprechen.
- (ii) Zeigen Sie Ihre Präzisierung aus dem vorherigen Aufgabenteil.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Seien V, W und U Vektorräume über einem Körper K . Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Isomorphismus $\varphi: \text{Hom}(V \otimes W, U) \rightarrow \text{Hom}(V, \text{Hom}(W, U))$ gibt, welcher eine naheliegende Bedingung erfüllt. Überlegen Sie sich dafür zunächst diese naheliegende Bedingung.

Aufgabe 1

Wir wählen für Aufgaben 1 und 2 die lexicographische Reihenfolge, also

$$e_1 \otimes e_1, \dots, e_1 \otimes e_m, e_2 \otimes e_1, \dots, e_2 \otimes e_m, \dots, e_n \otimes e_1, \dots, e_n \otimes e_m$$

als Basis von $K^n \otimes K^m$.

(i)

Es gelten

$$\begin{aligned} (f_A \otimes f_B)(e_1 \otimes e_1) &= f_A(e_1) \otimes f_B(e_1) = (1 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= e_1 \otimes (e_1 + e_3 - e_4) \\ &= e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_3 - e_1 \otimes e_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f_A \otimes f_B)(e_1 \otimes e_2) &= f_A(e_1) \otimes f_B(e_2) = (1 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \otimes \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e_1 \otimes (-2e_1 + 2e_2 + 3e_3) \\ &= -2e_1 \otimes e_1 + 2e_1 \otimes e_2 + 3e_1 \otimes e_3, \end{aligned}$$

$$(f_A \otimes f_B)(e_2 \otimes e_1) = 0 = (f_A \otimes f_B)(e_1 \otimes e_2), \text{ da } f_A(e_2) = 0,$$

und

$$(f_A \otimes f_B)(e_3 \otimes e_1) = 3(f_A \otimes f_B)(e_1 \otimes e_1)$$

und

$$(f_A \otimes f_B)(e_3 \otimes e_2) = 3(f_A \otimes f_B)(e_1 \otimes e_2),$$

da $f_A(e_3) = 3f_A(e_1)$. Wir erhalten also

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$$

(ii)

Es gilt

$$\begin{aligned} (1 \cdot B - 0 \cdot A + 3 \cdot D) &= \left(1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow = A \otimes B$$

gilt Allgemein: $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{l \times m}$

$$(f_A \otimes g_B)(e_i \otimes e_j) = (Ae_i) \otimes (Be_j) = A_{(-,i)} \otimes B_{(-,j)}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} e_i e_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n'} b_{jj} e_j e_j \right)$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n'}} a_{ii} b_{jj} (e_i \otimes e_j)$$

$$\rightsquigarrow A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

(iii)

Es gilt

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} 1(103) & -2(103) \\ 0(103) & 2(103) \\ 1(103) & 3(103) \\ -1(103) & 0(103) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{s.o.}}{\neq} A \otimes B.$$

Aufgabe 2

(i) Stimmt:

Seien $A \in K^{n \times m}$, $C \in K^{m \times r}$ und $B \in K^{n \times m}$, $D \in K^{m \times r}$. Mit der Beobachtung aus Aufgabe 1 erhalten wir dann

$$\begin{aligned} ((A \otimes B)(C \otimes D)) &= \left(\underbrace{(a_{ij}B)}_{1 \leq i \leq n \atop 1 \leq j \leq m} \underbrace{(c_{lr}D)}_{1 \leq l \leq r \atop 1 \leq r \leq m} \right) \\ &= (B_{ij})_{1 \leq i \leq n \atop 1 \leq j \leq m} (D_{lr})_{1 \leq l \leq r \atop 1 \leq r \leq m} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m B_{ij} D_{jr} \right)_{1 \leq i \leq n \atop 1 \leq r \leq m} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m (a_{ij}B)(c_{jr}D) \right)_{1 \leq i \leq n \atop 1 \leq r \leq m} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} c_{jr} B D \right)_{1 \leq i \leq n \atop 1 \leq r \leq m} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} c_{jr} \right)_{1 \leq i \leq n \atop 1 \leq r \leq m} (BD) \\ &= (AC \otimes BD). \end{aligned}$$

(ii) Stimmt i.A. nicht:

Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $B = A^T \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \underbrace{A \otimes B}_{= B^T \otimes A^T} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit $(A \otimes B)^T = B^T \otimes A^T$ gilt, müsste nun $(A \otimes B)^T = A \otimes B$ gelten, also $A \otimes B$ symmetrisch sein. Dies ist offenbar nicht der Fall.

(iii) Stimmt i.A. nicht:

Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dann gelten

$$\det(A \otimes B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^2$$

und

H

$$(\det(A)\det(B))^{2 \cdot 2} = (2 \cdot 1)^4 = 2^4$$

(iv) Stimmt:

$$\det(A \otimes B) = \det((A \otimes I_m) \otimes (I_n \otimes B)) \stackrel{(i)}{=} \det((A \otimes I_m)(I_n \otimes B))$$

$$\begin{array}{c} A \otimes I_m \\ \text{vom } K^n \otimes K^m \rightarrow K^{n+m} \text{ von} \\ \text{vom } I_n \text{ auf } I_{n+m} \text{ von} \\ K^m \otimes K^n \rightarrow K^{m+n} \\ \text{von } I_m \otimes A \end{array}$$

$$= \det(A \otimes I_m) \det(I_n \otimes B)$$

$$= \det(I_m \otimes A) \det(I_n \otimes B)$$

$$\begin{aligned} \det(A \otimes I_m) &= \det(q^{-1} \circ I_m \otimes A \circ q) \\ &= \det(q)^{-1} \det(I_m \otimes A) \det(q) \\ &= \det(I_m \otimes A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &\quad (\text{m} \times m) - \text{Matrix} \quad (\text{n} \times n) - \text{Matrix} \\ &= \det(A)^m \det(B)^n \end{aligned}$$

(v) Stimmt i.A. nicht:

Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dann erhalten wir

$$\underbrace{(A \otimes B)}_{= B^T \otimes A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit $\mathfrak{I}^{\wedge} \otimes A^{-1} = (A \otimes \mathfrak{B})^{-1}$ gilt, müsste nun $(A \otimes \mathfrak{B})^{-1} = A \otimes \mathfrak{B}$, also $(A \otimes \mathfrak{B})^2 = I_4$ gelten. Dies ist allerdings nicht der Fall, da z.B.

$$((A \otimes \mathfrak{B})^2)_{1,3} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 2 \neq 0.$$

Aufgabe 3

(i)

Für jede multilinear Abbildung $f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\tilde{f}: V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W$ mit $\tilde{f} \circ \psi_n = f$, wobei $\psi_n: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, $(v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n$.

als Diagramm

$$\left. \begin{array}{c} V_1 \times \dots \times V_n \xrightarrow{\forall f \text{ multilin.}} W \\ \downarrow \psi_n \quad \begin{array}{l} (v_1, \dots, v_n) \\ \downarrow J \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_n \end{array} \quad \begin{array}{l} Q \\ \nearrow \exists! \tilde{f} \text{ lin.} \end{array} \end{array} \right\} V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

(ii)

Wir zeigen die Aussage analog zum Fall $n=2$ in der Vorlesung. Betrachte also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \psi & \begin{array}{l} (v_1, \dots, v_n) \\ \downarrow J \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_n \end{array} & \\ V_1 \otimes \dots \otimes V_n & & \end{array}$$

für eine multilinear Abbildung $f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ und wähle Basen $v_i, j_i \in V_i$, $j_i \in J_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann ist $v_{1,j_1} \otimes \dots \otimes v_{n,j_n} \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, $j_i \in J_1, \dots, j_n \in J_n$ eine Basis von $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Definiere nun die lineare Abbildung

$$\tilde{f}: V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow \cup$$

durch $v_{1,j_1} \otimes \dots \otimes v_{n,j_n} \mapsto f(v_{n,j_1}, \dots, v_{n,j_n})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{f} \circ \psi \left(\sum_{j_1 \in J_1} \lambda_{1,j_1} v_{1,j_1} \otimes \dots \otimes \sum_{j_n \in J_n} \lambda_{n,j_n} v_{n,j_n} \right) &= \tilde{f} \left(\left(\sum_{j_1 \in J_1} \lambda_{1,j_1} v_{1,j_1} \otimes \dots \otimes \left(\sum_{j_n \in J_n} \lambda_{n,j_n} v_{n,j_n} \right) \right) \right) \\ &= f \left(\sum_{\substack{j_1 \in J_1 \\ j_n \in J_n}} \lambda_{1,j_1} \cdots \lambda_{n,j_n} (v_{1,j_1} \otimes \dots \otimes v_{n,j_n}) \right) \\ &= \sum_{\substack{j_1 \in J_1 \\ j_n \in J_n}} \lambda_{1,j_1} \cdots \lambda_{n,j_n} f(v_{1,j_1}, \dots, v_{n,j_n}) \\ &= f \left(\sum_{j_1 \in J_1} \lambda_{1,j_1} v_{1,j_1} \otimes \dots \otimes \sum_{j_n \in J_n} \lambda_{n,j_n} v_{n,j_n} \right)\end{aligned}$$

für alle Vektoren $\sum_{j_1 \in J_1} \lambda_{1,j_1} v_{1,j_1} \in V_1, \dots, \sum_{j_n \in J_n} \lambda_{n,j_n} v_{n,j_n} \in V_n$. Bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien dafür \tilde{f} und \tilde{f}' zwei solche lineare Abbildungen, d.h. es gilt

$$\tilde{f} \circ \psi = f = \tilde{f}' \circ \psi.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{f}(v_{1,j_1} \otimes \dots \otimes v_{n,j_n}) &= \hat{f} \circ \psi(v_{n,j_1}, \dots, v_{n,j_n}) = f(v_{n,j_1}, \dots, v_{n,j_n}) \\ &= \tilde{f}' \circ \psi(v_{n,j_1}, \dots, v_{n,j_n}) \\ &= \tilde{f}'(v_{1,j_1} \otimes \dots \otimes v_{n,j_n})\end{aligned}$$

für alle $j_1 \in J_1, \dots, j_n \in J_n$. Somit stimmen \tilde{f} und \tilde{f}' auf der Basis überein und sind somit gleich.

Aufgabe 4

Wir zeigen, dass es genau einen Isomorphismus

$$\varphi: \text{Hom}(V \otimes W, U) \rightarrow \text{Hom}(V, \text{Hom}(W, U))$$

gibt mit $\varphi(f)(v)(w) = f(v \otimes w)$.

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes haben wir eine Bijektion

$$\psi: \text{Hom}(V \otimes W, U) \rightarrow \text{Bil}(V \times W, U)$$

gegeben durch die Ververtitung mit der Abbildung
 $(v, u) \mapsto v \otimes u$. Nun definieren wir

$$\begin{aligned} \alpha: \text{Bil}(V \times W, U) &\rightarrow \text{Hom}(V, \text{Hom}(W, U)) \\ f &\mapsto v \mapsto (w \mapsto f(v, w)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \beta: \text{Hom}(V, \text{Hom}(W, U)) &\rightarrow \text{Bil}(V \times W, U) \\ g &\mapsto ((v, w) \mapsto g(v)(w)). \end{aligned}$$

Dann gelten

$$\beta \circ \alpha(f)(v, w) = \alpha(f)(v)(w) = f(v, w)$$

und

$$\alpha \circ \beta(g)(v)(w) = \beta(g)(v, w) = g(v)(w),$$

für alle $f \in \text{Bil}(V \otimes U, U)$, $g \in \text{Hom}(V, \text{Hom}(U, U))$, $v \in V$ und $u \in U$. Also $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\text{Bil}(V \otimes U, U)}$ und $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\text{Hom}(V, \text{Hom}(U, U))}$ und somit $\beta = \alpha^{-1}$.

Wir erhalten also eine Bijektion

$$\begin{aligned} \varphi: \text{Hom}(V \otimes U, U) &\rightarrow \text{Hom}(V, \text{Hom}(U, U)) \\ f &\mapsto \alpha \circ \varphi(f) \end{aligned}$$

Die Abbildung φ erfüllt

$$\varphi(f)(v)(u) = \alpha(u(f))(v)(u) = \varphi(f)(v, u) = f(v \otimes u)$$

für alle $f \in \text{Hom}(V \otimes U, U)$, $v \in V$ und $u \in U$ und ist somit auch linear per Definition der Vektorraum-Struktur auf $\text{Hom}(V \otimes U, U)$. Also ist φ ein Isomorphismus mit der gesuchten Eigenschaft. Ein solches φ ist eindeutig: Sind φ und φ' zwei solche Isomorphismen, d.h. es gilt

$$\varphi(f)(v)(u) = f(v \otimes u) = \varphi'(f)(v)(u)$$

für alle $f \in \text{Hom}(V \otimes U, U)$, $v \in V$ und $u \in U$, so erhalten wir

$$\varphi(f)(v) = \varphi'(f)(v)$$

für alle $f \in \text{Hom}(V \otimes U, U)$ und $v \in V$ und somit

$$\varphi(f) = \varphi'(f)$$

für alle $f \in \text{Hom}(V \otimes U, U)$. Also $\varphi = \varphi!$.