Lineare Algebra II
Blatt 11

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 28.06.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei K ein Körper und seien V und W zwei K-Vektorräume. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass das Tensorprodukt $V \otimes W$ trotz Konstruktion über Basen von V und W unabhängig von der Basiswahl ist. Hier wollen wir uns dies nochmal an einem ganz konkretem Beispiel ein wenig veranschaulichen. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2 = W$, wobei wir für V und W jeweils die Standardbasis e_1, e_2 wählen. Dann ist laut Vorlesung

$$e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$$

eine Basis. Wir setzen nun $v = e_1 + 2e_2$ und $w = 3e_1 - e_2$.

(i) Stellen Sie den Vektor $v \otimes w \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ vermöge der Rechenregeln aus Bemerkung 8.4.7 als Linearkombination obiger Basis dar.

(ii) Wir betrachten nun die Basen $v_1 = 2e_1 + 3e_2, v_2 = -e_1 + 2e_2$ von V und $w_1 = e_1 + e_2$, $w_2 = -e_2$ von W. Stellen Sie $v \otimes w$ in der Basis

$$v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$$

dar.

(iii) Verifizieren Sie durch einsetzen der Vektoren v_1, v_2, w_1 und w_2 in die Darstellung aus Teil (ii) die Darstellung aus Teil (i).

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei K ein Körper. Ganz analog zum K-Vektorraum $K[x]$ der Polynome in einer Unbestimmten x, können wir auch den K-Vektorraum $K[x, y]$ der Polynome in zwei Unbestimmten x und y definieren. Ein Element $f \in K[x, y]$ ist also von der Form

$$f = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in K$ für alle $0 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie, dass $K[x, y]$ die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes $K[x] \otimes K[y]$ erfüllt und somit auf natürliche Weise isomorph zu $K[x] \otimes K[y]$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Geben Sie einen natürlichen Isomorphismus zwischen V und $V \otimes K$ an.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Seien V und W Vektorräume über einem Körper K mit Dimensionen $\dim(V) = n \geq 2$ und $\dim(W) = m \geq 2$. Zeigen Sie, dass $V \otimes W$ nicht nur aus Elementen der Form $v \otimes w$ für $v \in V$ und $w \in W$ besteht.
Hinweis: Schauen Sie sich $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2$ für linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in V$ und $w_1, w_2 \in W$ an.

Aufgabe 1

(i)

$$v \otimes w = (e_1 + 2e_2) \otimes (3e_1 - e_2) = e_1 \otimes 3e_1 + e_1 \otimes (-e_2)$$

$$+ \; 2e_2 \otimes 3e_1 + 2e_2 \otimes (-e_2)$$

$$= 3e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2$$

$$+ \; 6e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2$$

(ii)

Wir stellen zunächst v als Linearkombination von v_1 und v_2 dar:

$$v = e_1 + 2e_2 = \lambda(2e_1 + 3e_2) + \mu(-e_1 + 2e_2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{II - \frac{3}{2} I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{II \cdot \frac{2}{7}}{\overset{I \cdot \frac{1}{2}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

Also $\mu = \frac{1}{7}$ und $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$.

Nun stellen wir w als Linearkombination von w_1 und w_2 dar:

$$w = 3e_1 - e_2 = \lambda(e_1 + e_2) + \mu(-e_2)$$

Also $\lambda = 3$ und $\mu = 4$.

Wir erhalten

$$v \otimes u = \left(\tfrac{4}{7}(2e_1 + 3e_2) + \tfrac{1}{7}(-e_1 + 2e_2)\right) \otimes \left(3(e_1+e_2) + 4(-e_2)\right)$$

$$= \tfrac{12}{7}(2e_1 + 3e_2) \otimes (e_1+e_2) + \tfrac{16}{7}(2e_1 + 3e_2) \otimes (-e_2)$$

$$+ \tfrac{3}{7}(-e_1 + 2e_2) \otimes (e_1+e_2) + \tfrac{4}{7}(-e_1 + 2e_2) \otimes (-e_2).$$

(iii)

$$v \otimes u \overset{(ii)}{=} \tfrac{12}{7}(2e_1 + 3e_2) \otimes (e_1+e_2) + \tfrac{16}{7}(2e_1 + 3e_2) \otimes (0e_1 - e_2)$$

$$+ \tfrac{3}{7}(-e_1 + 2e_2) \otimes (e_1+e_2) + \tfrac{4}{7}(-e_1 + 2e_2) \otimes (0e_1 - e_2)$$

$$= \tfrac{24}{7} e_1 \otimes e_1 + \tfrac{24}{7} e_1 \otimes e_2 + \tfrac{36}{7} e_2 \otimes e_1 + \tfrac{36}{7} e_2 \otimes e_2$$

$$- \tfrac{32}{7} e_1 \otimes e_2 - \tfrac{48}{7} e_2 \otimes e_2$$

$$- \tfrac{3}{7} e_1 \otimes e_1 - \tfrac{3}{7} e_1 \otimes e_2 + \tfrac{6}{7} e_2 \otimes e_1 + \tfrac{6}{7} e_2 \otimes e_2$$

$$+ \tfrac{4}{7} e_1 \otimes e_2 - \tfrac{8}{7} e_2 \otimes e_2$$

$$= 3e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 + 6 e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2$$

Aufgabe 2

Wir betrachten das Diagramm von K-Vektorräumen

offenbar bilinear

$$\begin{tikzcd} K[x] \times K[y] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \\ K[x,y] & \end{tikzcd}$$

$$(f,g) \mapsto f \cdot g$$

für eine bilineare Abb. $\alpha : K[x] \times K[y] \to U$ und müssen zeigen, dass eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde{\alpha} : K[x,y] \to U$ existiert mit $\tilde{\alpha} \circ \varphi = \alpha$.

Definiere $\tilde{\alpha} : K[x,y] \to U$ als lineare Fortsetzung der Abbildung $x^i y^j \mapsto \alpha(x^i, y^j)$ auf die Basis $x^i y^j$, $i,j \in \mathbb{N}$ von $K[x,y]$, also durch die Zuordnung

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j \mapsto \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}\, \alpha(x^i, y^j).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \circ \varphi \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i, \sum_{j=0}^{m} c_j y^j \right) &= \tilde{\alpha} \left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_i c_j x^i y^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_i c_j\, \alpha(x^i, y^j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha(b_i x^i, c_j y^j) \\ &= \alpha \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i, \sum_{j=0}^{n} c_j y^j \right), \end{aligned}$$

also $\tilde{\alpha} \circ \varphi = \alpha$. Eine solche Abb. $\tilde{\alpha}$ ist eindeutig:

Sind $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\alpha}'$ zwei solche Abbildungen, dh. es gelten

$$\tilde{\alpha} \circ \varphi = \alpha = \tilde{\alpha}' \circ \varphi,$$

so erhalten wir

$$\tilde{\alpha}(x^i y^j) = \tilde{\alpha}(\varphi(x^i, y^j)) = \alpha(x^i, y^j) = \tilde{\alpha}'(\varphi(x^i, y^j)) = \tilde{\alpha}'(x^i y^j)$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$ und somit $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}'$, da $x^i y^j$, $i, j \in \mathbb{N}$ eine Basis von $K[x,y]$ ist. Also gilt $\underbrace{K[x,y] \cong K[x] \otimes K[y]}_{\text{nach 8.4.5 (b)}}$.

Aufgabe 3

Unten ein anderer Ansatz

"Konkrete" Lösung:

Wir wollen einen natürlichen Isomorphismus $f: V \otimes K \to V$ finden. Daher definieren wir eine bilineare Abbildung $f': V \times K \to V$ und nutzen die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes. Betrachte die bilineare Abbildung

Skalar-mult.

$$f': V \times K \to V, \quad (v, \lambda) \mapsto \lambda \cdot v.$$

Dann erhalten wir eine eindeutige lineare Abbildung $f: V \otimes K \to V$ mit $f' = f \circ \varphi$, wobei $\varphi: V \times K \to V \otimes K$, $(v, \lambda) \mapsto v \otimes \lambda$ die zugehörige Abbildung des Tensorproduktes ist.

Wir wollen nun zeigen, dass f ein Isomorphismus, also bijektiv ist. Betrachte dazu die lineare Abbildung

$$g: V \to V \otimes K, \quad v \mapsto v \otimes 1 = \varphi(v, 1).$$

Dann gelten

$$f \circ g(v) = f \circ \varphi(v, 1) = f'(v, 1) = 1 \cdot v = v,$$

für alle $v \in V$, sodass f surjektiv ist und sowohl $g \circ f$ als auch $\mathrm{id}_{V \otimes K}$ machen das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \times K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \otimes K \\
V \otimes K \arrow[ur, dashed, "g \circ f"] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_{V \otimes K}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ:

Klar für $id_{V\otimes K}$. Für $g\circ f$:

$$g\circ f\circ \varphi(v,\lambda) = g\circ f'(v,\lambda) = g(\lambda v) = \lambda v\otimes 1 = \underbrace{v\otimes\lambda}_{=\varphi(v,\lambda)}$$

gilt für alle $(v,\lambda)\in V\times K$. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gilt also $g\circ f = id_{V\otimes K}$ und f ist injektiv. Also ist f ein Isomorphismus.

"Abstrakte" Lösung

8.4.5 (b)

Wir zeigen, dass V die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes $V\otimes K$ erfüllt und somit ein eindeutiger Isomorphismus $V\otimes K \to V$ existiert welches verträglich mit den zugehörigen bilinearen Abbildungen dieser beiden Tensorprodukte ist.

Betrachte das Diagramm von Vektorräumen

Skalarmult.

$$\begin{tikzcd} V\times K \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \\ V & \end{tikzcd}$$

$$(v,\lambda) \mapsto \lambda v$$

für eine bilineare Abbildung $\tilde{f}: V\times K\to U$. Definiere

$$f: V\to U,\quad v\mapsto \tilde{f}(v,1).$$

Dann ist f aufgrund der Bilinearität von $\tilde{f}$ linear und es gilt

$$f \circ \varphi(v,\lambda) = f(\lambda v) = \tilde{f}(\lambda v, 1) = \lambda \tilde{f}(v,1) = \tilde{f}(v,\lambda)$$

für alle $(v,\lambda) \in V \times K$, sodass wir $f \circ \varphi = \tilde{f}$ erhalten. Ein solches f ist eindeutig:

Sind f und f' solche linearen Abb., es gilt also

$$f \circ \varphi = \tilde{f} = f' \circ \varphi,$$

so erhalten wir

$$f(v) = f(\varphi(v,1)) = \tilde{f}(v,1) = f'(\varphi(v,1)) = f'(v)$$

für alle $v \in V$ und somit $f = f'$. Also erfüllt V die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes $V \otimes K$ und wir haben nach dieser Bemerkung einen natürlichen Isomorphismus $V \otimes K \to V$.

Aufgabe 4

Seien v_1 und v_2 linear unabhängige Vektoren in V und w_1 und w_2 linear unabhängige Vektoren in W. Angenommen, es existieren Vektoren $v \in V$ und $w \in W$ mit

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 = v \otimes w.$$

Wir ergänzen v_1, v_2 zu einer Basis v_i, $i \in I$, von V und w_1, w_2 zu einer Basis w_j, $j \in J$, von W. Dann können wir

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \quad \text{und} \quad w = \sum_{j \in J} \mu_j w_j$$

jeweils schreiben für eindeutige Skalare $\lambda_i, \mu_j \in K$, $i \in I$, $j \in J$, wobei alle bis auf endlich viele dieser Skalare Null sind. Wir erhalten also

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 = v \otimes w = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j \in J} \mu_j w_j\right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \lambda_i \mu_j \underbrace{(v_i \otimes w_j)}_{\text{Basis von } V \otimes W}$$

Somit muss also indes. $\lambda_1 \mu_1 = 1 = \lambda_2 \mu_2$ und $\lambda_1 \mu_2 = 0 = \lambda_2 \mu_1$ gelten $\lightning$ Also können solche v und w nicht existieren.

$\lambda_1 \mu_2 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 0$ oder $\mu_2 = 0$

$\lambda_1 \mu_1 = 1$ $\rightsquigarrow \lambda_1 \neq 0$

$\lambda_2 \mu_2 = 1$ $\rightsquigarrow \mu_2 \neq 0$