

## Lineare Algebra II

### Blatt 10

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 21.06.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

---

**Aufgabe 1 (5 Punkte):** Wir betrachten den Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  mit zusammen mit der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Geben Sie die zugehörige duale Basis konkret in Form von Matrizen an und nutzen Sie anschließend Satz 8.2.10, um den Vektor

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

als Linearkombination obiger Basis darzustellen.

**Aufgabe 2 (5 Punkte):** Beweisen Sie Satz 8.2.5 (b), d.h. beweisen Sie, dass eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  zwischen zwei Vektorräumen  $V$  und  $W$  über einem Körper  $K$  genau dann surjektiv ist, wenn die duale Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  injektiv ist.

**Aufgabe 3 (5 Punkte):** In der Vorlesung behandeln wir momentan Skalarerweiterungen. Hier wollen wir uns nun mit Skalarkoerweiterungen beschäftigen. Sei dazu  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Sei darüberhinaus  $L$  ein weiterer Körper, welcher  $K$  enthält und sei  $W$  ein  $L$ -Vektorraum.

$V' \xrightarrow{\text{einfach}} V$

- (i) Zeigen Sie, dass ein (von  $W$  unabhängiger)  $L$ -Vektorraum  $V'$  mit  $V \otimes V'$  existiert, sodass man eine (kanonische) Bijektion zwischen  $\text{Hom}_L(W, V')$  und  $\text{Hom}_K(W, V)$  hat.
- (ii) Zeigen Sie, dass der Vektorraum  $V'$  "bis auf eindeutige Isomorphie über  $V$ " eindeutig ist, d.h. wenn  $V''$  ein weiterer  $L$ -Vektorraum mit obiger Eigenschaft ist, dann existiert genau ein Isomorphismus  $V' \rightarrow V''$  von  $L$ -Vektorräumen, welcher auf  $V$  die Identität ist.

$V' \xrightarrow{\cong} V''$

Hinweis Teil (i): Definieren Sie eine geeignete  $L$ -Vektorraumstruktur auf  $\text{Hom}_K(L, V)$ .

**Aufgabe 4 (5 Punkte):** Zeigen Sie, dass wenn  $V$  und  $W$  Vektorräume über einem Körper  $K$  sind und  $L$  ein weiterer Körper ist, welcher  $K$  enthält, sich  $\text{Hom}_L(V_L, W_L)$  mit der Skalarerweiterung  $(\text{Hom}_K(V, W))_L$  von  $\text{Hom}_K(V, W)$  nach  $L$  auf natürliche Weise identifizieren lässt. Überlegen Sie sich dabei, was "identifizieren" hier überhaupt bedeutet soll.

# Aufgabe 1

Die duale Basis  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (\mathbb{R}^3)^* = \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{1 \times 3}$   
wird durch die Gleichungssysteme

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right), \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) \in \mathbb{R}^{1 \times 3} \\ \rightsquigarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \\ \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \swarrow \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

und

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

beschrieben. Wir verwenden also den Gauß-Algorithmus an:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + \text{I}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} - \text{II}}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \alpha_1 = \left( \frac{1}{2} \ -\frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{S.0.}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \alpha_2 = \left( \frac{1}{2} \quad \frac{5}{4} \quad -\frac{1}{4} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{S.0.}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \alpha_3 = \left( -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$$

Nach Satz 8.2.10 gilt

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\left( \alpha_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)}_{= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{\left( \alpha_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)}_{= -\frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{3}{4}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\left( \alpha_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)}_{= 3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} - \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$$

$$= -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 2

" $\Rightarrow$ ": Seien  $\alpha, \alpha' \in \cup^*$  mit  $\underbrace{f^*(\alpha)}_{= \alpha \circ f} = \underbrace{f^*(\alpha')}_{= \alpha' \circ f}$ . Da  $f$

surjektiv ist, besitzt  $f$  ein Rechtsinverses und wir erhalten  
 $\alpha = \alpha'$  durch Verhetzung mit diesem Rechtsinversen. Also ist  $f^*$   
injektiv.

" $\Leftarrow$ ": Angenommen,  $f$  ist nicht surjektiv. Dann haben wir  
eine nicht-triviale Zerlegung  $\cup = \text{im}(f) \oplus \cup'$ . Sind nun  
 $\alpha$  und  $\alpha' \in \cup^*$  mit  $\alpha|_{\text{im}(f)} = \alpha'|_{\text{im}(f)}$ , aber  $\alpha \neq \alpha'$ , so  
gilt  $f^*(\alpha) = \alpha \circ f = \alpha' \circ f = f^*(\alpha')$ , sodass  $f^*$  nicht injektiv ist.

solcher  $\alpha$  und  $\alpha'$  gibt es. Wir können eine Basis von  $\cup$  wählen,  
welche aus einer Basis von  $\text{im}(f)$  und einer Basis von  $\cup'$  besteht.  
Um definieren wir  $\alpha$  und  $\alpha'$  mit den gewünschten Eigenschaften auf  
der Basis von  $\cup$ .

### Aufgabe 3



nochmal viele Punkte  
hier für euch... vgl. letztes  
Blatt

(i)

Wir definieren

$$L \times \text{Hom}_K(L, V) \rightarrow \text{Hom}_K(L, V), (\lambda, f) \mapsto \underbrace{f(\lambda \cdot -)}_{a \mapsto f(\lambda a)}.$$

Dann gelten

$$\lambda(f+g)(a) = f+g(\lambda \cdot a) = f(\lambda \cdot a) + g(\lambda \cdot a) = \lambda f(a) + \lambda g(a),$$

$$(\lambda + \mu)(f)(a) = f((\lambda + \mu)a) = f(\lambda a + \mu a) = f(\lambda a) + f(\mu a) = \lambda f(a) + \mu f(a),$$

$$(\lambda \cdot \mu)(f)(a) = f((\lambda \cdot \mu)a) = f(\lambda(\mu a)) = \lambda \cdot f(\mu a) = \lambda \cdot (\mu \cdot f)(a)$$

und

$$1 \cdot f(a) = f(1 \cdot a) = f(a)$$

für alle  $f, g \in \text{Hom}_K(L, V)$  und  $\lambda, a \in L$ . Also ist  $\text{Hom}_K(L, V)$  vernünftiger Weise Skalarmultiplikation ein  $L$ -Vektorraum. Zuletzt haben wir die Surjektion

$$\begin{aligned} \text{Hom}_K(L, V) &\xrightarrow{P} V \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Abbildung

$$\alpha: \text{Hom}_K(W, V) \rightarrow \text{Hom}_L(U, \text{Hom}_K(L, V))$$

$$f \mapsto u \mapsto \underbrace{(a \rightsquigarrow f(a \cdot u))}_{= (a \rightsquigarrow a \cdot f(u))}$$

Diese Abbildung ist bijektiv mit Inverser

$$\beta: \text{Hom}_L(U, \text{Hom}_K(L, V)) \rightarrow \text{Hom}_K(W, V)$$

$$g \mapsto \underbrace{(u \mapsto g(u)(1))}_{= \rho \circ g}$$

In der Tat:

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta(g) &= (u \mapsto (a \rightsquigarrow \underbrace{\beta(g)(a \cdot u)}_{g(a \cdot u)})) = (u \mapsto \underbrace{(a \rightsquigarrow g(a \cdot u))(1)}_{g(u)}) \\ &= g \end{aligned}$$

für alle  $g \in \text{Hom}_L(U, \text{Hom}_K(L, V))$ , sodass  $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\text{Hom}_L(U, \text{Hom}_K(L, V))}$   
und

$$\begin{aligned} \beta \circ \alpha(f) &= (u \mapsto \underbrace{\alpha(f)(u)(1)}_{= f(u)}) = f \end{aligned}$$

für alle  $f \in \text{Hom}_K(W, V)$ , sodass  $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\text{Hom}_K(W, V)}$ .

(ii)

Seien  $V'$  und  $V''$  zwei L-VR, für welche die Eigenschaft aus (i) erfüllt ist. Insbes. haben wir

$$\begin{array}{ccc} V' & & V'' \\ p' \searrow & \swarrow p'' & \\ & V & \end{array}$$

Nun definieren wir  $h': V' \rightarrow V''$  und  $h'': V'' \rightarrow V'$  wie folgt:  
Über die Identifikation von Teil (i) erhalten wir

$$h' \in \text{Hom}_L(V', V'')$$

als das Element, welches zu  $p' \in \text{Hom}_k(V', V)$  entspricht und

$$h'' \in \text{Hom}_L(V'', V')$$

als das Element, welches zu  $p'' \in \text{Hom}_k(V'', V)$  entspricht.

Dann gelten

$$p(\text{id}_{V'}) = p' \circ \text{id}_{V'} = p'$$

das  $p$  von  
 $\omega = V'$

und

$$p(h'' \circ h') = p' \circ (h'' \circ h') = \underbrace{p' \circ h''}_{= p''} \circ h' = p'' \circ h' = p'$$

sodass, da  $p$  eine Bijektion ist,  $h'' \circ h' = \text{id}_{V'}$  gelten muss

Analog erhalten wir  $h'' \circ h' = id_{V''}$  und haben somit, dass  
 $h': V' \rightarrow V''$  ein Isomorphismus mit  $p'' \circ h' = p'$  ist.

Eindeutigkeit: Ist  $\tilde{h}'$  ein weiterer solcher Iso; es gelten also

$$p'' \circ h' = p'$$

und

$$p'' \circ \tilde{h}' = p'$$

so können wir dieses Argument mit  $\tilde{h}'$  anstelle von  $h$  wiederholen und erhalten  $h'' = \tilde{h}'^{-1}$ , also  $\tilde{h} = h$ .

## Aufgabe 4

Wir zeigen, dass  $\text{Hom}_L(V_L, W_L)$  die universelle Eigenschaft von  $(\text{Hom}(V, W))_L$  erfüllt und somit auf natürliche Weise isomorph zu  $(\text{Hom}(V, W))_L$  ist, wobei der Isomorphismus auf  $V$  die Identität ist.

Sei  $U$  ein  $L$ -VLR und betrachte

$$\alpha: \text{Hom}_L(\text{Hom}_L(V_L, W_L), U) \rightarrow \text{Hom}_k(\text{Hom}_k(V, W), U)$$
$$f: \text{Hom}_L(V_L, W_L) \rightarrow U \hookrightarrow f|_{\text{Hom}_k(V, W)}: \text{Hom}_k(V, W) \rightarrow U$$
$$h \mapsto f(h) \qquad \qquad h|_V \mapsto f(h)$$

Wir definieren

$$\beta: \text{Hom}_k(\text{Hom}_k(V, W), U) \rightarrow \text{Hom}_L(\text{Hom}_L(V_L, W_L), U).$$

$$g: \text{Hom}_k(V, W) \rightarrow U \mapsto g': \text{Hom}_L(V_L, W_L) \rightarrow U$$
$$h \mapsto g(h) \qquad \qquad h_L \mapsto g(h)$$

wohldef. nach 8.3.5

Dann gelten

$$\alpha \circ \beta(g) = \alpha \circ \beta(h \mapsto g(h)) = \alpha(h_L \mapsto g(h)) = (h \mapsto g(h)) = g$$

und

$$\beta \circ \alpha(f) = \beta \circ \alpha(h \mapsto f(h)) = \beta(h|_V \mapsto f(h)) = (h \mapsto f(h)) = f,$$

sodass  $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\text{Hom}_L(\text{Hom}_K(V, W), U)}$  und  $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\text{Hom}_K(\text{Hom}_L(V, W), U)}$ .  
also ist  $\alpha$  bijektiv und somit  $\text{Hom}_L(V, W)$  die Skalarerweiterung von  $\text{Hom}_K(V, W)$ .

↗ nach 8.3.2