Aufgabe 1 (2 Punkte):

Seien U, V und W endlich-dimensionale euklidische ($\mathbb{R}$-)Vektorräume und seien $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineare Abbildungen. Wir schreiben f^* und g^* für die assoziierten adjungierten Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Adjungierte von $g \circ f$ durch $f^* \circ g^*$ gegeben ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{10})$ nilpotent mit Minimalpolynom $\mu_f(x) = x^5$ und mit $\dim(\ker(f^3)) = 7$. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform J_f von f.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, welche durch

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von f.

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Sei K ein Körper, sei $U \subseteq K^n$ ein Untervektorraum und sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (K^n)^*$ die duale Basis assoziiert zur Standardbasis $e_1, \ldots, e_n \in K^n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \operatorname{Hom}(U, K^n) \to (U^*)^n, f \mapsto (\alpha_1 \circ f, \ldots, \alpha_n \circ f)$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume und sei $f\colon V \times V \to W$ eine symmetrische bilineare Abbildung, welche außerdem alternierend ist, d.h. es gilt $f(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass f die Null-Abbildung ist.

Aufgabe 6 (3 Punkte):

Existiert eine lineare Abbildung $f\colon V \otimes V^* \otimes V^* \to K^2$ mit $f(v, \alpha, \beta) = (\alpha(v), \beta(v))$ für alle $v \in V$ und $\alpha, \beta \in V^*$?

Aufgabe 7 (3 Punkte):

Geben Sie einen Homomorphismus von $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$-Algebren an, welcher das Polynom $x^2 - 3x + 2$ auf 0 abbildet.

Aufgabe 8 (2 Punkte):
Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Rechnen Sie nach, dass

$$v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = v_1 \wedge (v_1 + v_2) \wedge (v_1 + v_2 + v_3)$$

gilt.