Lineare Algebra II
Blatt 9

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 14.06.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, welche durch die Multiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 2021 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

gegeben ist. Seien darüberhinaus $g_1, g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die linearen Abbildungen, welche durch die Multiplikationen mit den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

gegeben sind. Geben Sie die Matrizen zu den linearen Abbildungen $f^*(g_1), f^*(g_2)$ (bezüglich der Standardbasen) an.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Für einen Körper K betrachten wir den K-Vektorraum $K^{\oplus\mathbb{N}}$.

(i) Zeigen Sie, dass der Dualraum von $K^{\oplus\mathbb{N}}$ durch $K^{\mathbb{N}}$ gegeben (also isomorph zu $K^{\mathbb{N}}$) ist.

(ii) Begründen Sie, dass $K^{\oplus\mathbb{N}}$ kein Dualraum ist.
Genauer: Zeigen Sie, dass es keinen K-Vektorraum V gibt, sodass der Dualraum V^* isomorph zu $K^{\oplus\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei $\mathbb{K}$ der Körper der rellen Zahlen/der Körper der komplexen Zahlen und sei V ein n-dimensionaler euklidischer/unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit reellem/hermiteschem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$. Begründen Sie, dass die lineare Abbildung

$$h(\langle -,- \rangle)\colon V \to V^*,\ v \mapsto (w \mapsto \langle v, w\rangle)$$

ein Isomorphismus ist und zeigen Sie, dass die Adjungierte eines Endomorphismuses $g \in \mathrm{End}(V)$ unter dem Isomorphismus $h(\langle -,- \rangle)$ mit der dualen Abbildung g^* identifiziert wird.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei U eine Teilmenge von V. Wir definieren den Annulator U^0 von U als die Teilmenge des Dualraumes V^*, welche alle Vektoren in U auf 0 abbildet.

(i) Begründen Sie kurz, dass U^0 ein Untervektorraum von V^* ist.

(ii) Sei nun U ein Untervektorraum von V. Stellen Sie eine gültige Formel auf, mit der man die Dimension von U^0 aus den Dimensionen von U und von V berechnen kann.

(iii) Zeigen Sie die von Ihnen aufgestellte Formel aus dem vorherigen Aufgabenteil.