Lineare Algebra II
Blatt 8

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 07.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Nutzen Sie die Cramersche Regel, um

(i) die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

zu bestimmen.

(ii) die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystemes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Überprüfen Sie ihr Ergebnis anschliessend mit Hilfe der Inversen A^{-1} aus dem Aufgabenteil.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq M$ eine Antikette, wenn je zwei verschiedene Elemente a und a' von A unvergleichbar sind, also weder $a \leq a'$ noch $a' \leq a$ gelten. Zeigen Sie, dass M eine Antikette A besitzt, sodass jedes Element von M mit einem Element von A vergleichbar ist.
Hinweis: Wenden Sie Zorn's Lemma auf die durch "$\subseteq$" geordnete Menge aller Antiketten von M an.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Seien M, M' und N Mengen.

(i) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon N \to M \times M'$ auf naheliegende Weise einem Paar von Abbildungen $f_1\colon N \to M$ und $f_2\colon N \to M'$ entspricht. Überlegen Sie sich dabei, was "entsprechen" in diesem Kontext bedeutet.

(ii) Geben Sie in Abhängigkeit von M und M' (und unabängig von N) eine Menge K an, sodass eine Abbildung $f\colon K \to N$ auf analoge naheliegende Weise einem Paar von Abbildungen $f_1\colon M \to N$ und $f_2\colon M' \to N$ entspricht.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei M eine Menge und sei K ein Körper.

(i) Konstruieren Sie einen K-Vektorraum $F(M)$, sodass M eine Basis von $F(M)$ ist.
Genauer: Formal gesehen müssen die Elemente von M keine Vektoren in $F(M)$ sein, sondern vermöge einer Bijektion mit einer Teilmenge von $F(M)$ identifiziert werden können. Diese Teilmenge soll dann eine Basis von $F(M)$ sein.

(ii) Sei nun V ein weiterer K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass es eine naheliegende Bijektion zwischen der Menge der beliebigen Abbildungen von M nach V und der Menge der linearen Abbildungen von $F(M)$ nach V gibt.