Lineare Algebra II
Blatt 7

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 31.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Suchen Sie (z.B in einem Buch oder im Internet) nach einem (beliebigen!) Beweis der Aussage, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ überabzählbar sind und geben Sie eine Skizze des Beweises mit eigenen Worten wieder.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Welche der Axiome einer partiellen Ordnung erfüllen die folgenden Relationen:

(i) $m \sim n$, wenn m und n einen gemeinsamen Teiler (echt) größer als 1 besitzen auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

(ii) $m \sim n$, wenn m ein Teiler von n ist auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

(iii) $M \sim M'$, wenn eine injektive Abbildung von M nach M' existiert auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$.

(iv) $U \sim U' \Leftrightarrow U \subseteq U'$ auf der Menge der Untervektorräume eines Vektorraumes V.

Handelt es sich in den Fällen, in denen alle Axiome einer partiellen Ordnung erfüllt sind, sogar um totale Ordnungen?

Aufgabe 3 (5 Punkte): Bestimmen Sie alle Relationen auf einer Menge M, welche zugleich eine Äquivalenzrelation und eine partielle Ordnung sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei K ein Körper. Wir betrachen nun den K-Vektorraum $V = K^{\mathbb{N}}$ und die Teilmenge

$$U = K^{\oplus \mathbb{N}} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid a_n = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

(ii) Konstruieren Sie einen Endomorphismus des Quotientenvektorraumes $V/U = K^{\mathbb{N}}/K^{\oplus \mathbb{N}}$, welcher surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(iii) Folgern Sie, dass V/U ein unendlich-dimensionaler Vektorraum ist.