Lineare Algebra II
Blatt 6

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 24.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Bestimmen Sie die Minimalpolynome der folgenden fünf Endomorphismen:

(i) $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, x)$.

(ii) $g\colon \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2^3,\ (a,b,c) \mapsto (a, a+b, b+c)$.

(iii) $(\overline{\ \ })\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$, wobei wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen.

(iv) $(\ \ )^T\colon K^{n\times n} \to K^{n\times n},\ A \mapsto A^T$, wobei K ein beliebiger Körper ist.

(v) $\frac{d}{dx}\colon \mathbb{R}[x]_{\le d} \to \mathbb{R}[x]_{\le d},\ f \mapsto \frac{df}{dx}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x)$

(ii) $\mu_{AB}(x) = (\mu_A \cdot \mu_B)(x)$

(iii) $\mu_{AB}(x^2) = (\mu_A \cdot \mu_B)(x)$

(iv) $\deg(\mu_A) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in K\colon A = \lambda I_n$

(v) $\deg(\mu_A) = n \Leftrightarrow \mu_A = \chi_A$

Bemerkung zu (v): Wie sonst auch dürfen Sie sich aussuchen, mit welcher der Definitionen des charakteristischen Polynomes Sie arbeiten. Der Wahrheitsgehalt der Aussage kann allerdings von der Definition abhängen.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei K ein Körper und sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Nutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton, um in Abhängigkeit des charakteristischen Polynomes χ_A die Inverse von A zu bestimmen.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei K ein Körper und sei $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ ein normiertes Polynom mit Koeffizienten aus K. Zum Polynom f betrachten wir die Matrix

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n\times n},$$

genannt die Begleitmatrix zu f. Wir wollen uns ohne die Verwendung des charakteristischen Polynomes und des Satzes von Cayley-Hamilton überlegen, dass f das Minimalpolynom von A_f ist.

(i) Zeigen Sie, dass f ein Polyom minimalen Grades ist mit $f(A_f) \cdot e_1 = 0$.

(ii) Begründen Sie, dass $f(A_f) \cdot e_i = 0$ für alle $1 \le i \le n$ gilt.

(iii) Folgern Sie, dass f das Minimalpolynom von A_f ist.