

Lineare Algebra II

Blatt 5

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 17.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Jordanzerlegung für jede natürliche Zahl m die Potenz A^m in Abhängigkeit von m .

Aufgabe 3 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ stets ähnlich zu ihrer Transponierten $A^T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

- (i) Wir wollen uns überlegen, dass jede Matrix $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Quadratwurzel besitzt, d.h. eine Matrix $B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $B^2 = A$.
 - (1) Zeigen Sie, dass es genügt die Aussage für einen Jordan-Block zu zeigen.
 - (2) Zu einem Jordan-Block J_λ zum Eigenwert λ betrachten wir nun den Jordan-Block $J_{\sqrt{\lambda}}$ derselben Größe zum Eigenwert $\sqrt{\lambda}$ für eine fest gewählte Quadratwurzel $\sqrt{\lambda}$ von λ . Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von $(J_{\sqrt{\lambda}})^2$.
 - (3) Nutzen Sie die im Teil (2) gefundene Jordan-Normalform um eine Quadratwurzel von J_λ zu finden.
- (ii) Gilt die Aussage aus Aufgabenteil (i) auch für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, wenn man $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ erlaubt?