Lineare Algebra II
Blatt 4
HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 10.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten den Endomorphismus f von $\mathbb{R}^2$, welcher durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie alle f-invarianten Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei K ein Körper. Bestimmen Sie für alle $1 \leq n \leq 4$ die maximale Anzahl von nilpotenten Matrizen in $K^{n\times n}$, welche paarweise nicht-ähnlich sind. Geben Sie dabei Beispiele von solchen Matrizen an.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei K ein Körper und seien $A, B \in K^{9\times 9}$ nilpotente Matrizen mit Nilpotenzgrad 5.

(i) Angenommen, es gilt $\dim(\ker(A)) = 5 = \dim(\ker(B))$. Sind A und B stets ähnlich?

(ii) Angenommen, es gilt $\dim(\ker(A^2)) = 5 = \dim(\ker(B^2))$. Sind A und B stets ähnlich?

Hinweis: Argumentieren Sie mit Jordan-Blöcken.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass alle Untervektorräume von V f-invariant sind genau dann, wenn f ein Vielfaches der Identitätsabbildung ist, also $f = \lambda \mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in K$ gilt.