Lineare Algebra II
Blatt 3

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 03.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz 6.6.7 alle reellen Zahlen c, sodass die Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} c & -2 & -2 \\ -2 & c & -2 \\ -2 & -2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

positiv definit ist. Zeigen Sie dafür zunächst, dass das charakteristische Polynom von A_c durch $(x-(c-4))(x-(c+2))^2$ (bzw. durch $-(x-(c-4))(x-(c+2))^2$ je nach Definition des charakteristischen Polynomes) gegeben ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sie K ein Körper und sei $A \in K^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzgrad m.

(i) Rechnen Sie nach, dass die Matrix $\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i A^i$ die Inverse zu der Matrix $I_n + A$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass auch die Matrix $I_n - A$ invertierbar ist, indem Sie die Inverse analog zu Teil (i) direkt angeben.

(iii) Sei nun $E \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Sind allgemeiner die Matrizen $E + A$ und $E - A$ invertierbar?

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei K ein Körper und sei $A \in K^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzgrad m.

(i) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v$ für jeden Vektor $v \in K^n$, welcher $A^{m-1}v \neq 0$ erfüllt, linear unabhängig sind.

(ii) Folgern Sie, dass $m \leq n$ gelten muss.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei K ein Körper und sei $f\colon K^n \times K^n \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

(i) Weisen Sie nach, dass die Menge

$$O(f,K) = \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid f(Av, Aw) = f(v,w) \text{ für alle } v, w \in K^n\}$$

mit der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe bildet.

(ii) Sind Gruppen der Form $O(f,K)$ stets abelsch?

(iii) Wir betrachten nun die symmetrische Bilinearform

$$f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,((x,y),(x',y')) \mapsto xx'.$$

Bestimmen Sie die Gruppe $O(f,\mathbb{R})$, d.h. geben Sie für eine reelle (2×2)-Matrix A genau an welche Einschränkungen man an die Wahl der vier Einträge hat, damit A ein Element von $O(f,\mathbb{R})$ definiert.