Lineare Algebra II
Blatt 2

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 26.04.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Auf dem gesamten Übungblatt steht $\mathbb{K}$ für den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Bestimmen Sie reelle Zahlen a und b so, dass die durch

$$24x^2 - 12xy + 8y^2 = 6$$

definierte Kurve im $\mathbb{R}^2$ nach einer orthogonalen Abbildung durch eine Gleichung der Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschrieben werden kann, also eine Ellipse darstellt.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Im Beweis von Satz 6.4.5 haben wir die zu zeigende Aussage nur im Spezialfall $V = \mathbb{C}^n$ gezeigt und dann auf Satz 6.2.7 verwiesen. Formulieren Sie aus, wie man mit Satz 6.2.7 auf den Fall $V = \mathbb{C}^n$ reduziert.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $(f+g)^* = f^* + g^*$ für alle $f, g \in \mathrm{End}(V)$.

(ii) $(\lambda f)^* = \lambda f^*$ für alle $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$ für alle $f, g \in \mathrm{End}(V)$.

(iv) $f^{-1}(U^\perp) = f^*(U)^\perp$ für alle $f \in \mathrm{End}(V)$ und alle Untervektorräume $U \subseteq V$.

(v) $\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(f^*)$ für alle $f \in \mathrm{End}(V)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei K ein Körper, sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \times V \to k$ eine Bilinearform. Man nennt die Bilinearform f nicht-entartet, falls die Abbildung

$$h(f)\colon V \to \mathrm{Hom}(V, K), v \mapsto (w \mapsto f(v, w))$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) Die Bilinearform f ist nicht-entartet.

(ii) Gilt $f(v, w) = 0$ für alle $w \in V$, so folgt $v = 0$.

(iii) Es existiert eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, sodass die zu f assiziierte Matrix $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ invertierbar ist.

(iv) Für jede Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V ist die zu f assoziierte Matrix $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ invertierbar.