# Lineare Algebra II
# Blatt 13

HHU Düsseldorf, SoSe 21

**Abgabe bis Montag, 12.07.2021, 10:15 Uhr, im Ilias**

---

**Aufgabe 1 (5 Punkte):** Wir betrachten die Tensoralgebra $T(\mathbb{R}^3)$ und die beiden Elemente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T(\mathbb{R}^3)$, welche durch

$$v_0 = 1,\ v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (2,2,0)\otimes(0,1,0) - (1,-2,0)\otimes(0,1,1),\ v_n = 0 \text{ für alle } n \geq 3$$

und

$$v'_0 = -1,\ v'_1 = (-1,3,0),\ v'_2 = 0,\ v'_3 = (2,0,0)\otimes(2,1,0)\otimes(3,2,1),\ v'_n = 0 \text{ für alle } n \geq 4$$

gegeben sind.

(i) Berechnen Sie das Produkt $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (v'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T(\mathbb{R}^3)$.

(ii) Stellen Sie den Vektor $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Linearkombination der endlichen Produkte der Standardbasisvektoren dar (vgl. Satz 8.6.7).

**Aufgabe 2 (5 Punkte):** Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 8.6.10 der "Tafelanschriften", d.h. rechnen Sie nach, dass die Abbildung

$$\varphi\colon K[x] \to A,\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \tilde{\varphi}(x)^i$$

tatsächlich ein Homomorphismus von $K$-Algeben ist, wobei $A$ eine kommutative $K$-Algebra und $\tilde{\varphi}\colon \{x\} \to A$ eine Abbildung ist.

**Aufgabe 3 (5 Punkte):** Beweisen Sie Satz 8.6.11 der "Tafelanschriften", d.h. beweisen Sie, dass sich jede lineare Abbildung $f\colon V \to A$ von einem $K$-Vektorraum $V$ in eine $K$-Algebra $A$ eindeutig zu einem Homomorphismus $\tilde{f}\colon T(V) \to A$ von $K$-Algebren fortsetzen lässt.

**Aufgabe 4 (5 Punkte):** Realisieren Sie die $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{C}$ als Quotient von der $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$, d.h. finden Sie ein Ideal $U \subseteq \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$, sodass der Quotient $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]/U$ als $\mathbb{R}$-Algebra isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie z.B. den Isomorphiesatz aus Bemerkung 8.6.17 zusammen mit Satz 2.3.8.