Lineare Algebra II
Blatt 12

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 05.07.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten die beiden linearen Abbildungen $f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $f_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, welche durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

(i) Geben Sie die darstellende Matrix $A \otimes B$ von $f_A \otimes f_B\colon \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basen von $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^4$ an, welche aus den Tensorprodukten der jeweiligen Standardbasisvektoren bestehen (hier wird implizit für die Basis des Tensorproduktes eine Reihenfolge gewählt. Diese Reihenfolge sollte dann bei allen Aufgaben mit Tensorprodukten von Matrizen beibehalten werden (Aufgaben 1 und 2)).

(ii) Bestimmen Sie die (1×3)-Blockmatrix $\begin{pmatrix} 1 \cdot B & 0 \cdot B & 3 \cdot B \end{pmatrix}$. Fällt Ihnen etwas auf?

(iii) Berechnen Sie mit Hilfe Ihrer Beobachtung aus dem vorherigen Aufgabenteil die Matrix $B \otimes A$. Gilt $A \otimes B = B \otimes A$?

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei K ein Körper und seien A, B, C und D vier Matrizen mit Einträgen aus K. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$, falls die Produkte AC und BD definiert sind.

(ii) $(A \otimes B)^T = B^T \otimes A^T$.

(iii) $\det(A \otimes B) = (\det(A)\det(B))^{mn}$, falls $A \in K^{n\times n}$ und $B \in K^{m\times m}$.

(iv) $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$, falls $A \in K^{n\times n}$ und $B \in K^{m\times m}$.

(v) $(A \otimes B)^{-1} = B^{-1} \otimes A^{-1}$, falls A und B invertierbar sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über einem Körper K.

(i) Präzisieren Sie die Aussage aus Bemerkung 8.4.12, also die Aussage, dass multilineare Abbildungen $V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ genau den linearen Abbildungen $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$ entsprechen.

(ii) Zeigen Sie Ihre Präzisierung aus dem vorherigen Aufgabenteil.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Seien V, W und U Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Isomorphismus $\varphi\colon \mathrm{Hom}(V \otimes W, U) \to \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W, U))$ gibt, welcher eine naheliegende Bedingung erfüllt. Überlegen Sie sich dafür zunächst diese naheliegende Bedingung.