Lineare Algebra II
Blatt 11

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 28.06.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei K ein Körper und seien V und W zwei K-Vektorräume. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass das Tensorprodukt $V \otimes W$ trotz Konstruktion über Basen von V und W unabhängig von der Basiswahl ist. Hier wollen wir uns dies nochmal an einem ganz konkretem Beispiel ein wenig veranschaulichen. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2 = W$, wobei wir für V und W jeweils die Standardbasis e_1, e_2 wählen. Dann ist laut Vorlesung

$$e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$$

eine Basis. Wir setzen nun $v = e_1 + 2e_2$ und $w = 3e_1 - e_2$.

(i) Stellen Sie den Vektor $v \otimes w \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ vermöge der Rechenregeln aus Bemerkung 8.4.7 als Linearkombination obiger Basis dar.

(ii) Wir betrachten nun die Basen $v_1 = 2e_1 + 3e_2, v_2 = -e_1 + 2e_2$ von V und $w_1 = e_1 + e_2$, $w_2 = -e_2$ von W. Stellen Sie $v \otimes w$ in der Basis

$$v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$$

dar.

(iii) Verifizieren Sie durch einsetzen der Vektoren v_1, v_2, w_1 und w_2 in die Darstellung aus Teil (ii) die Darstellung aus Teil (i).

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei K ein Körper. Ganz analog zum K-Vektorraum $K[x]$ der Polynome in einer Unbestimmten x, können wir auch den K-Vektorraum $K[x, y]$ der Polynome in zwei Unbestimmten x und y definieren. Ein Element $f \in K[x, y]$ ist also von der Form

$$f = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in K$ für alle $0 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie, dass $K[x, y]$ die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes $K[x] \otimes K[y]$ erfüllt und somit auf natürliche Weise isomorph zu $K[x] \otimes K[y]$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Geben Sie einen natürlichen Isomorphismus zwischen V und $V \otimes K$ an.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Seien V und W Vektorräume über einem Körper K mit Dimensionen $\dim(V) = n \geq 2$ und $\dim(W) = m \geq 2$. Zeigen Sie, dass $V \otimes W$ nicht nur aus Elementen der Form $v \otimes w$ für $v \in V$ und $w \in W$ besteht.
Hinweis: Schauen Sie sich $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2$ für linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in V$ und $w_1, w_2 \in W$ an.