Lineare Algebra II
Blatt 10

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 21.06.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit zusammen mit der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Geben Sie die zugehörige duale Basis konkret in Form von Matrizen an und nutzen Sie anschließend Satz 8.2.10, um den Vektor

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

als Linearkombination obiger Basis darzustellen.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Beweisen Sie Satz 8.2.5 (b), d.h. beweisen Sie, dass eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W über einem Körper K genau dann surjektiv ist, wenn die duale Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ injektiv ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): In der Vorlesung behandeln wir momentan Skalarerweiterungen. Hier wollen wir uns nun mit Skalarkoerweiterungen beschäftigen. Sei dazu K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Sei darüberhinaus L ein weiterer Körper, welcher K enthält und sei W ein L-Vektorraum.

(i) Zeigen Sie, dass ein (von W unabhängiger) L-Vektorraum V' mit $V \subseteq V'$ existiert, sodass man eine (kanonische) Bijektion zwischen $\mathrm{Hom}_L(W, V')$ und $\mathrm{Hom}_K(W, V)$ hat.

(ii) Zeigen Sie, dass der Vektorraum V' "bis auf eindeutige Isomorphie über V" eindeutig ist, d.h. wenn $V \subseteq V''$ ein weiterer L-Vektorraum mit obiger Eigenschaft ist, dann existiert genau ein Isomorphismus $V' \to V''$ von L-Vektorräumen, welcher auf V die Identität ist.

Hinweis Teil (i): Definieren Sie eine geeignete L-Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Hom}_K(L, V)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass wenn V und W Vektorräume über einem Körper K sind und L ein weiterer Körper ist, welcher K enthält, sich $\mathrm{Hom}_L(V_L, W_L)$ mit der Skalarerweiterung $(\mathrm{Hom}_K(V, W))_L$ von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ nach L auf natürliche Weise identifizieren lässt. Überlegen Sie sich dabei, was "identifizieren" hier überhaupt bedeutet soll.