Lineare Algebra II
Blatt 1

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 19.04.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Ergänzen Sie den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis, d.h. finden Sie eine Orthonormalbasis, die den Vektor v enthält.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Nutzen Sie Satz 6.1.7 um ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ zu finden mit der Eigenschaft, dass die beiden Vektoren $(2,1)$ und $(1,2)$ bezüglich dieses Skalarproduktes orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass sowohl die Determinante als auch die Eigenwerte einer unitären Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ auf dem Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ liegen.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

(i) Sei K ein Körper mit der Eigenschaft, dass eine positive natürliche Zahl m existiert, sodass $m \cdot 1 = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass keine totale Ordnung existiert, welche K die Struktur eines geordneten Körpers gibt (Den Begriff des geordneten Körpers sollten Sie aus der Analysis I von den reellen Zahlen kennen. Auf der Rückseite finden Sie dennoch noch einmal die Definition und einige Eigenschaften, welche Sie verwenden dürfen).

(ii) Zeigen Sie, dass für jeden endlichen Körper (ein Körper, dessen zugrundeliegende Menge endlich ist) eine positive natürliche Zahl m existiert, sodass $m \cdot 1 = 0$ gilt.

(iii) Folgern Sie, dass sich der Begriff des Skalarproduktes sich nicht analog zum reellen oder komplexen Fall für Vektorräume über endlichen Körpern definieren lässt. Das ist also insbesondere der Fall für Körper der Form $\mathbb{F}_p$.

Hinweis: Schauen Sie sich für die Aufgabenteile (i) und (ii) die rekursive Folge an, welche durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 1$ definiert wird.

Wir wiederholen ein paar Begriffe, welche Sie in der Analysis I gesehen haben sollten: Sei K eine Menge. Eine Ordnungsrelation auf K ist eine Teilmenge $R \subset K \times K$, sodass folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es gilt $(a, a) \in R$ für alle $a \in K$

(ii) Gelten $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$, so gilt $a = b$.

(iii) Gilt $(a, b), (b, c) \in R$, so auch $(a, c) \in R$.

Zudem nennt man eine Ordnungsrelation R auf einer Menge K eine totale Ordnung, falls $(a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$ für alle $a, b \in K$ gilt.
Anstelle von $(a, b) \in R$ schreibt man auch $a \leq_R b$ oder $a \leq b$, falls R aus dem Kontext ersichtlich ist. Zudem schreibt man $a < b$, falls $a \leq b$ und $a \neq b$ gelten.
Ist nun K ein Körper zusammen mit einer totalen Ordnung $\leq$ auf K, so nennt man K einen geordneten Körper, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Gilt $a \leq b$, so auch $a + c \leq b + c$ für alle $a, b, c \in K$.

(ii) Gelten $0 \leq a$ und $0 \leq b$, so gilt auch $0 \leq ab$ für alle $a, b \in K$.

Ist ein geordneter Körper K gegeben, so gelten zum Beispiel Aussagen wie:

- $0 < 1$.

- Für alle $a, b \in K$ gilt $ab \geq 0$ genau dann, wenn ($a \geq 0$ und $b \geq 0$) oder ($a \leq 0$ und $b \leq 0$).