

8.5 Die universelle Eigenschaft des Quotientenvektorraums

Satz 8.5.1: Sind V, W K -VR, $U \subseteq V$ ein UVR, $\text{kan}: V \rightarrow V/U$ die kanonische Abb., so habe eine Bijektion

$$\text{Hom}(V/U, W) \rightarrow \{ \tilde{g} \in \text{Hom}(V, W) \mid U \subseteq \ker \tilde{g} \}$$

$$g \longmapsto g \circ \text{kan}$$



Anders ausgedrückt: Jedes $\tilde{g} \in \text{Hom}(V, W)$ mit $U \subseteq \ker \tilde{g}$ lässt sich als $g \circ \text{kan}$ schreiben für ein eindeutiges g .

Def 8.5.2: Dies nennt man die universelle Eigenschaft des Quotientenvektorraums

Bem 8.5.3: Durch diese univ. Eig wird $(V/U, \text{kan})$ eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus festgelegt: Ist (V', f') ein weiteres Paar mit dieser univ. Eig.

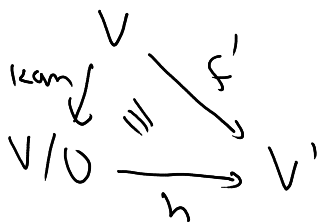
so ex. genau ein Iso. $h: V/U \rightarrow V'$ s. d.

d.h.

$$\text{Hom}(V', W) \rightarrow \{ \tilde{g} \in \text{Hom}(V, W) \mid U \subseteq \ker \tilde{g} \}$$

$$g \longmapsto g \circ f'$$

ist eine Bijektion



Ausflug in die Kategorientheorie

Vektorraumkonstruktionen

	Gegeben	Erhalte	Gegeben	Erhalte
Dualraum $K\text{-VR} \rightarrow K\text{-VR}$	V VR	V^* VR	$f \in \text{Hom}(V, W)$ $f, g \rightsquigarrow$	$f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$
Skal.-Er. $K\text{-VR} \rightarrow L\text{-VR}$	V K-VR	V_L L-VR	$f \in \text{Hom}(V, W)$ $f, g \rightsquigarrow$ $\uparrow \uparrow$ K-VR	$f_L \in \text{Hom}(V_L, W_L)$ $f_L \circ g_L = (f \circ g)_L$
\otimes $(K\text{-VR}) \times (K\text{-VR}) \rightarrow K\text{-VR}$	V, V' VR	$V \otimes V'$	$f \in \text{Hom}(V, W)$ $f' \in \text{Hom}(V', W')$ $f, f', g, g' \rightsquigarrow$	$f \otimes f' \in \text{Hom}(V \otimes V', W \otimes W')$ $(f \otimes f') \circ (g \otimes g') = (f \circ g) \otimes (f' \circ g')$

Kategorie = „Menge von Strukturen und zugehörige Homomorphismen“

Bsp.: • $K\text{-VR}$ = Kategorie der K -Vektorräume mit lin. Abb.

- Die Kategorie der Mengen mit (beliebigen) Abb. dazwischen.
- Gruppen
- Ringe
- Körper

Funktor = „Abb. zwischen Kategorien, die die Kommutativbedingungen erfüllt“

