Zeigen Sie, dass $\langle v, w\rangle := v^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} w$ ein Skalarprod. auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Lösung: Wende 6.1.7 (a) an.

zu prüfen: (i) A ist symmetrisch: klar

(ii) A ist pos. def.

zu prüfen:

$$(x\ y)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix}} > 0$$ falls x, y nicht beide 0

$$\underbrace{(x\ y)\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix}}$$

$$= x(x+y) + y(x+2y)$$

$$= x^2 + 2xy + 2y^2$$

$$= (x^2 + 2xy + y^2) + y^2$$

$$= (x+y)^2 + y^2 \geq 0$$

$(x+y)^2 + y^2 = 0$ impliziert $(x+y)^2 = 0$ und $y^2 = 0$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$\underbrace{x+y = 0 \qquad y = 0}_{\Rightarrow x = 0}$

$\square$

In $\mathbb{R}^3$ mit std-Skal-Prod:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Gilt $v_1 \perp v_2$?

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 - 1 + 0 = 1$$

Also: Nein.

(b) Gesucht: $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, s.d.: $v_3 \perp v_1$ und $v_3 \perp v_2$

$$v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\underbrace{}_{=\, 2x + y + z} \qquad \underbrace{}_{=\, x - y}$$

⇝ Mögliche Lsg: $x = 1$, $y = 1$, $z = -3$

Std-Skal-Prod auf $\mathbb{C}^2$

Norm von $\begin{pmatrix} 1+2i \\ 3+4i \end{pmatrix}$?

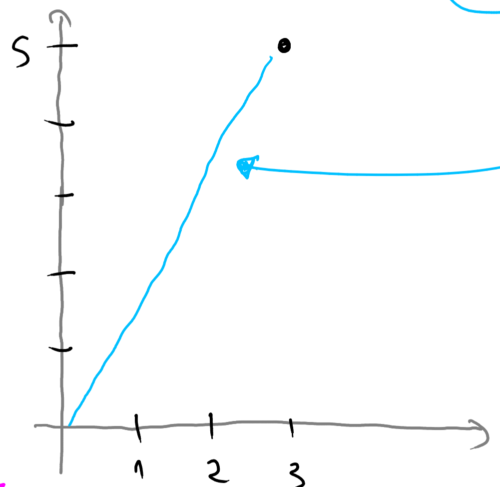
$$\left\| \begin{pmatrix} 1+2i \\ 3+4i \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1+2i)\overline{(1+2i)} + (3+4i)\overline{(3+4i)}}$$

$$= \sqrt{|1+2i|^2 + |3+4i|^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{30}$$

Norm von $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$: $\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ = bisschen weniger als 6



Zeigen Sie: Im $\mathbb{R}^3$ (sei $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$): $U := \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}} \ w \}$ ist ein 2-dim UVR von $\mathbb{R}^3$

Lösung: U ist die Lösungsmenge von: $x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot 4 = 0$

Also UVR.

Die Koeff der LGS ist $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rk} A = 1$. $\Rightarrow \dim U = 3 - \operatorname{rk} A = 2$.

$U = \ker A$

Von Hand prüfen, dass U ein UVR ist:

Mit 3.2.2: • $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in U$: ✓ $\quad (0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 4 = 0)$

• $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \in U \overset{?}{\Rightarrow} r\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \in U$

$x=2, y=3, z=-2$ ist eine Lösung.

$(2,3,-2)$ ist eine Lösung.

Die Lösungsmenge ist

$\{(2,3,-2), (4,6,-4), (0,0,0), \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{ganz viel}}\}.$

$\quad \|$

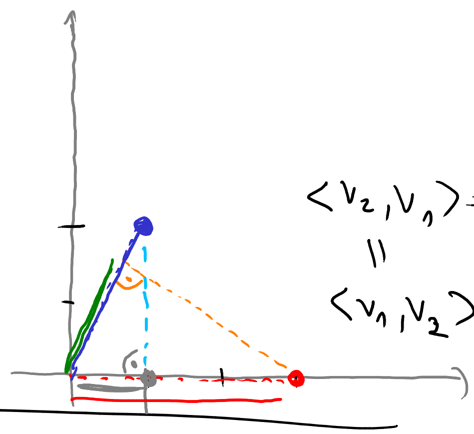
$\{(-2y-2z, y, z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$

$(2,3,-2)$ ist keine Menge.
$\{(2,3,-2)\}$ ist eine Menge.
$\{2,3,-2\}$ ist eine Menge.

In $\mathbb{R}^2$ mit Std-Skal-Prod:

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$\langle v_1, v_2\rangle = 1\cdot 3 + 2\cdot 0 = 3$



$\langle v_2, v_1\rangle =$ grün · blau

$\quad \|$

$\langle v_1, v_2\rangle =$ rote Länge mal graue Länge

Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit $\langle v, w\rangle_{KO} = v^T\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix} w$

$\left\langle \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right\rangle_{KO} = 1a_1b_1 + 1a_1b_2 + 1a_2b_1 + 2a_2b_2$

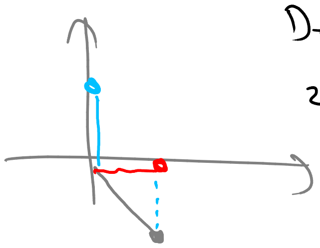
Ist $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \perp_{KO} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$? $\quad \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{KO} = 1 \quad$ Nein.

$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|_{KO} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle_{KO}} = \sqrt{1} = 1$

$\left\|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\|_{KO} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{KO}} = \sqrt{1\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1} = \sqrt{2}$

Ist $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \perp_{ko} \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$? $\quad \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 1 - 1 = 0$ Ja.

$\mathbb{R}^2$

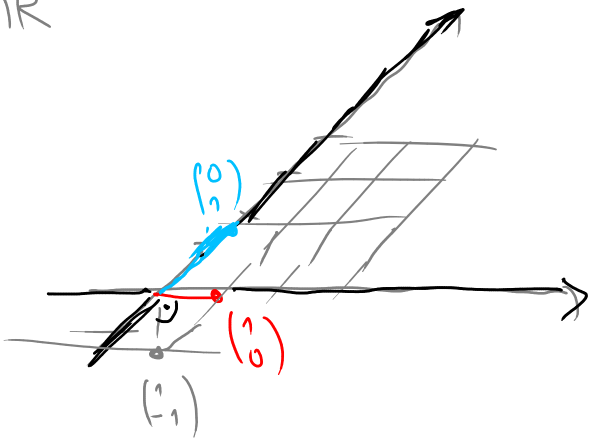


Das obige passt nicht zu diesem Bild!

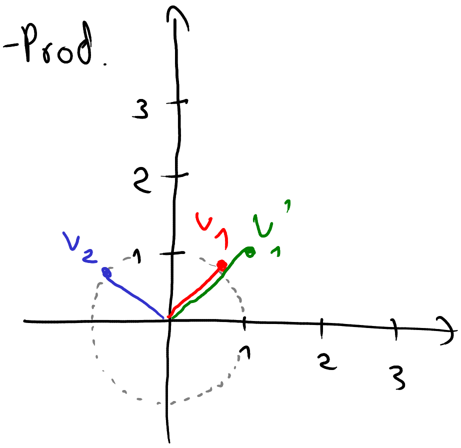
$$\left\| \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\|_{ko} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle_{ko}}$$

$$= \sqrt{1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot(-1) + 1\cdot(-1)\cdot1 + 2\cdot(-1)\cdot(-1)}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$



Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ mit Std-Skal-Prod.



Bsp 1: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Bsp 2: $v_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$$\|v_1\| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot 2 + \tfrac{1}{4}\cdot 2} = 1$$

$$\|v_2\| = \ \dots\ = 1$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0$$

Also: v_1, v_2 ist Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$.

Wie kommt man da drauf?

$v_1' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \|v_1'\| = \sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$
$\|$

Also: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

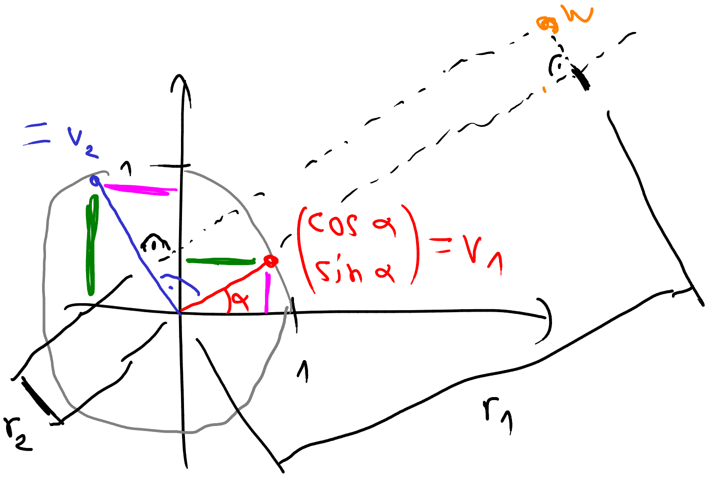
Dann: $\|v_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| = 1$

Bsp 3

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = v_2$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$



$$\|v_1\| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = 1$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \cos\alpha \cdot (-\sin\alpha) + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0$$

$w = r_1 \cdot v_1 + r_2 \cdot v_2$ Möchte r_1, r_2 bestimmen.

$$\langle v_1, w \rangle = r_1 \cdot \|v_1\| = r_1$$

$$\langle v_2 \cdot w \rangle = r_2 \cdot \|v_2\| = r_2$$