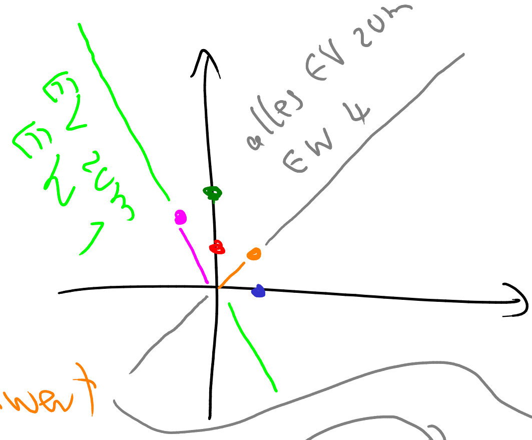
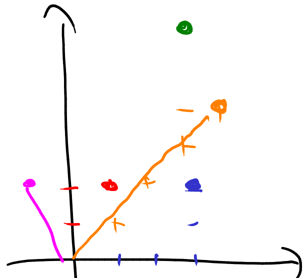
Was sind Eigenvektoren?

$$B=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$$

$$B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$





Eigenwert

$$B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$ ← Eigenvektor

$$B\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$B\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$ ← Eigenvektor

Eigenwert

Falls C nicht injektiv: ex. Vektor $v\neq 0$ mit $Cv=0 = 0\cdot v$

Also ist v EV zum EW 0.

$\boxed{C \text{ ist nicht injektiv} \Leftrightarrow 0 \text{ ist EW.}}$

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&2&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

Gesucht: inv'bare Matrix S, s.d. $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. $\underbrace{\text{(Geht das überhaupt?)}}_{(*)}$

$$A-x\cdot I_3=\begin{pmatrix}3-x&0&0\\2&2-x&1\\3&1&2-x\end{pmatrix}$$ Entwickle nach 1. Zeile

$$\chi_A=\det(A-x\cdot I_3)=(3-x)\cdot\underbrace{\det\begin{pmatrix}2-x&1\\1&2-x\end{pmatrix}}_{\underbrace{((2-x)\cdot(2-x)-1\cdot 1)}_{4-4x+x^2-1\;=\;x^2-4x+3}}$$

$$=(3-x)(x^2-4x+3)=3x^2-12x+9-x^3+4x^2-3x$$

$$=-x^3+7x^2-15x+9$$

NSt davon sind die EW von A.

NSt davon: $\hookrightarrow 3$

$\hookrightarrow \frac{4 \pm \sqrt{16-4\cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = 2 \pm 1$

Also: Die NSt sind 1 und 3

Also: EW von A sind 1 und 3.

Nächstes Ziel: Bestimme alle EV.

... zum EW 1:

Löse $\left(\begin{array}{ccc|c} 3-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2-1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2-1 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} -1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lösungen sind $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ ← Das sind die EV zum EW 1 (außer $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

... zum EW 3:

Löse $\left(\begin{array}{ccc|c} 3-3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2-3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2-3 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lösungen sind $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ ←

Das sind die EV zum EW 3 (außer $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Die obigen EV spannen zusammen nicht $\mathbb{R}^3$ auf, also existiert keine Basis aus EV, also ist A nicht diagonalisierbar.

Antwort auf (*) ist nein.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht: inv'bare Matrix S, s.d. $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. $\underbrace{\text{(Geht das überhaupt?)}}_{(*)}$

$$\chi_A = (3-x)(x^2-4x+3)$$; NSt sind 1 und 3

Nächstes Ziel: Bestimme alle EV.

... zum EW 1: Löse $\left(\begin{array}{ccc|c} 3-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2-1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2-1 & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \cdot 2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} -1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen sind $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ ← Das sind die EV zum EW 1 (außer $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Die Menge der EV zum EW 1 ist $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R}^\times \right\}$

... zum EW 3: Löse $\left(\begin{array}{ccc|c} 3-3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2-3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2-3 & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot 1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} 1 & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lsg davon: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_2 - x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

2-dim Lösungsraum

Das ist ein UVR; also: Die EV zu einem festen EW bilden (wenn man 0 noch dazu nimmt) einen UVR.

Wähle eine Basis aus EV:

EW 1: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_1$

EW 3: $x_2 = 2, x_3 = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_2$

$x_2 = 0, x_3 = 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =: v_3$

Setze $S = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ← Gesuchte Matrix S

Laut Bew. von S. 2.3 aus der Vorlesung ist

$S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix; genauer:

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

ähnlich zu A

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{S} v_1 \xmapsto{A} 1 \cdot v_1 \xmapsto{S^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto v_2 \xmapsto{A} 3 v_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 4-x & 5 \\ 6 & 7-x \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$B' = S^{-1} B S = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 13-x & 8 \\ -3 & -2-x \end{pmatrix}$

$\chi_B = (4-x)(7-x) - 5\cdot 6 = x^2 - 11x + 28 - 30$

$\chi_{B'} = (13-x)(-2-x) + 3\cdot 8 = x^2 - 11x - 26 + 24$

$\det B = 28 - 30 = -2$

$\det B' = 13\cdot(-2) + 3\cdot 8 = -26 + 24 = -2$

Warum wird der 0-Vektor nicht als EV angesehen?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 17 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also: 17 ist Eigenwert (mit EV $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)??

Das wäre nutzlos.