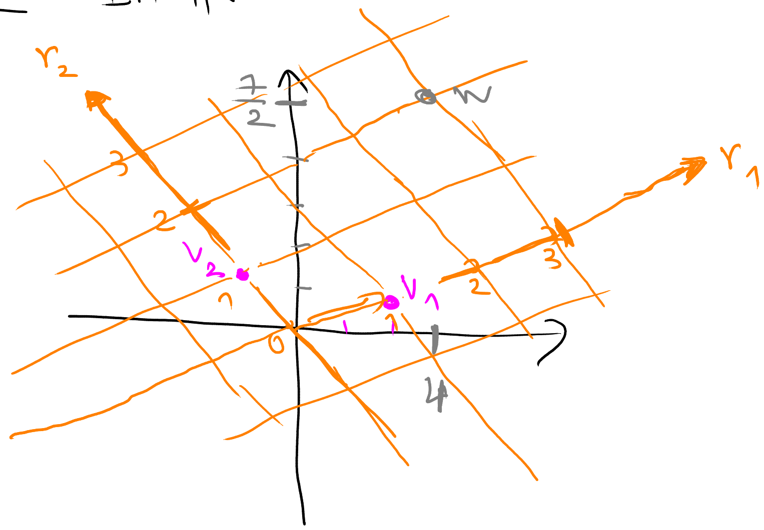
Basis: In $\mathbb{R}^2$



Eine Basis: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\Rightarrow$ Jede Basis von $\mathbb{R}^2$ besteht aus 2 Vektoren.

Noch eine Basis: $v_1 = \begin{pmatrix}2\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$$w = \begin{pmatrix}4\\ \frac{7}{2}\end{pmatrix} = 3 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 \qquad w \in \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} + \langle v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

Bsp zu 3.4.4: In $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$I_0 = \{1,2\} \qquad I = \{1,\dots,5\}$

Laut 3.4.4 ex. Basis bestehend aus $v_1, v_2, \underbrace{\text{manche von } v_3, v_4, v_5}_{\text{genau einer davon}}$.

- Prüfe, dass v_1, v_2 l.u. sind:

  Betrachte $x_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

  $$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 0x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 1x_2 &= 0 \end{aligned}$$

  Lsg dieses LGS: $x_1 = 0, \; x_2 = 0$

  Nur triviale LGS $\Rightarrow$ l.u.

- Ist v_1, v_2, v_3 l.u.? LGS mit Koeff.-Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ex. nicht-triv. Lsg: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 sind nicht l.u.

Alternativ: Prüfe, ob $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$.

Ergibt LGS $\quad x_1 v_1 + x_2 \cdot v_2 = v_3$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Hat Lsg: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

Also: $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$

Also v_1, v_2, v_3 l.a.

- Ist $v_4 \in \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$? $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Hat keine Lösung. Also $v_4 \notin \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$

Also v_1, v_2, v_4 l.u. (nach 3.3.4.)

Das ist also eine Basis.

(Könnte prüfen: $v_5 \in \langle v_1, v_2, v_4 \rangle_{\mathbb{R}}$

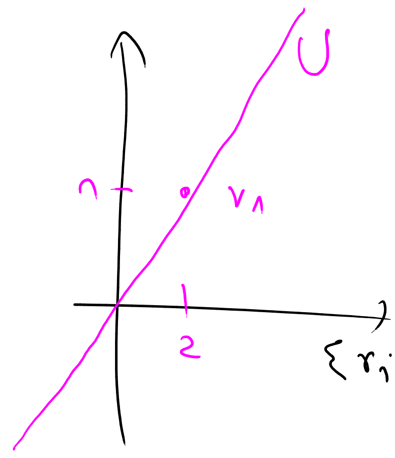
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hat Lsg: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$)

$\mathbb{F}_5^3 = (\mathbb{F}_5)^3 \qquad \mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- Bestimme alle Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$:

Jeder UVR hat eine Basis, also schreibe alle möglichen Basen hin. $\leadsto$ • $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Ist v_1 eine Basis?

- l.u.? $x_1 \cdot v_1 = 0$

  Einzige Lsg: $x_1 = 0$. Also l.u.

- Erzeugt v_1 den ganzen Vektorraum?

$\{r_1 v_1 \mid r_1 \in \mathbb{R}\} = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \neq \mathbb{R}^2$, also ist v_1 keine Basis von $\mathbb{R}^2$.

$U := \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$. Dann ist v_1 Basis von U.

Sind $v, v' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $v' = r \cdot v$, so ist $\langle v' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$

- $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \Rightarrow v$ l.u.

  $\Rightarrow v$ ist Basis von $U = \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$.

- Habe auf diese Art alle 1-dim UVR von $\mathbb{R}^2$ gefunden.

- Alle 2-dim UVR von $\mathbb{R}^2$:

  Sind v_1, v_2 l.u., so ist $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$

  Formale Begründung: Kann v_1, v_2 durch weitere Vektoren zu Basis von $\mathbb{R}^2$ ergänzen (3.3.4). Diese Basis besteht dann aus 2 Vektoren. Also war schon v_1, v_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

  $\rightsquigarrow$ 2-dim UVR von $\mathbb{R}^2$: nur $\mathbb{R}^2$ selbst.

- 0-dim UVR von $\mathbb{R}^2$:

  $\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$v_1 = x^2 + 2x + 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$v_2 = x^3 + x^2 + 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$v_3 = x^3 - 2x \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Sind v_1, v_2, v_3 l.u.?

0-Polynom

$$y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + y_3 \cdot v_3 = 0$$

$\leftarrow$ Hat das nicht-triv. Lösungen, also $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, nicht alle $= 0$?

$$= y_1 \cdot x^2 + y_1 \cdot 2 \cdot x + y_1 + y_2 x^3 + y_2 x^2 + y_2 + y_3 x^3 - y_3 \cdot 2x$$

$$= \underbrace{(y_2 + y_3)}_{\overset{||}{0}} x^3 + \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\overset{||}{0}} \cdot x^2 + \underbrace{(2y_1 - 2y_3)}_{\overset{||}{0}} \cdot x + \underbrace{y_1 + y_2}_{\overset{||}{0}}$$

$$\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hat nicht-triv. Lsg, z.B. $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 1$. Also l.a.

- $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-VR

$\mathbb{R}$ ↑ Vektoren, $\mathbb{Q}$ ↑ Skalare

Sind $\sqrt{2}, 3$ l.u?

$3 \in \langle \sqrt{2} \rangle_{\mathbb{Q}}$? $\Leftrightarrow$ ex. $r \in \mathbb{Q}$ s.d. $r \cdot \sqrt{2} = 3$?

Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ existiert kein solches r.

Also $3 \notin \langle \sqrt{2} \rangle_{\mathbb{Q}}$

$\sqrt{2}$ (alleine) ist l.u. (da $r \cdot \sqrt{2} = 0$ nur die triv. Lsg hat)

3.3.4 $\Rightarrow$ $\sqrt{2}, 3$ l.u.

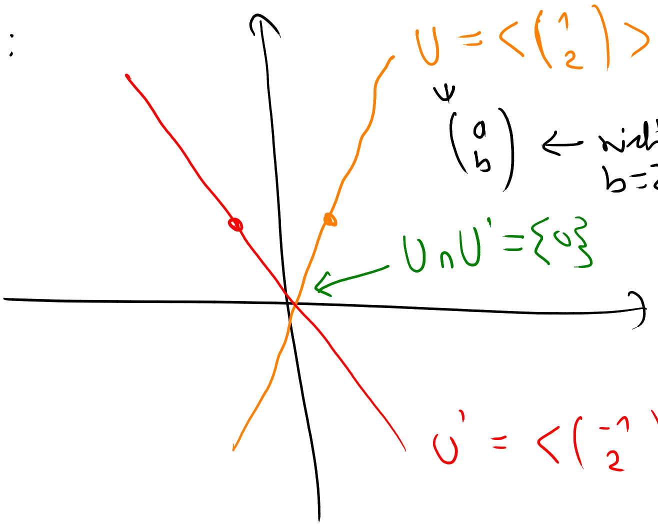
- $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-VR

$\mathbb{R}$ ↑ Vektoren, $\mathbb{R}$ ↑ Skalare

Sind $\sqrt{2}, 3$ l.u?

Nein, da $3 \in \langle \sqrt{2} \rangle_{\mathbb{R}}$, da $3 = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}$.

In $\mathbb{R}^2$:



$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ ← Vektoren aus U lassen sich durch eine Zahl beschreiben, nämlich: $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ← nicht unabh., sondern: $b = 2 \cdot a$

$U \cap U' = \{0\}$

$U' = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

$U + U' = \mathbb{R}^2$

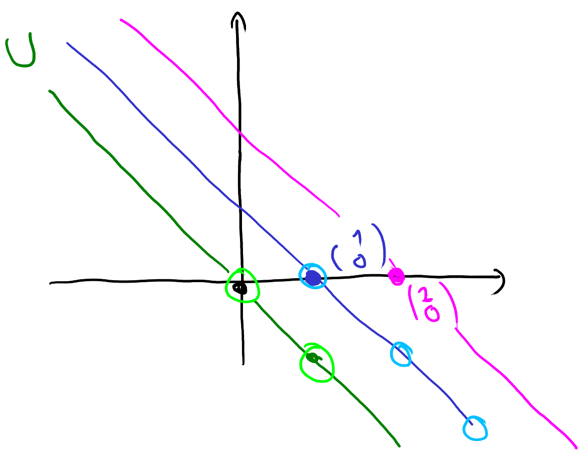
$\dim(U + U') = 2$

$\dim U + \dim U'$

$U + U = U$

Allgemein gilt: $U + U' = \langle U \cup U' \rangle_K$

$V = \mathbb{R}^2$



$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

$\mathbb{R}^2 / U$

Nebenklasse

U, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U$ $\Big\}$ Elemente von $\mathbb{R}^2/U$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\Big\}$ nicht Elemente von $\mathbb{R}^2/U$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U\right) + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + U$

$$\mathbb{R}^2 / U \approx \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$$