Bsp für Vektorräume

- Wichtigstes Bsp: K^n
  Bsp. vom Bsp: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$

- Bsp 3.1.3, konkret: $V = \mathbb{R}[x]$

$$v = x^3 + 5x + 7$$
$$v' = 2x^2 + x - 2$$
$$v + v' = x^3 + 2x^2 + 6x - 5 \quad \in V$$
$$\tfrac{1}{5} \cdot v = \tfrac{1}{5} \cdot x^3 + x + \tfrac{7}{5} \quad \in V$$
$$4 \cdot \left(\tfrac{1}{5} \cdot v\right) = \tfrac{4}{5} x^3 + \dots \qquad = \tfrac{4}{5} \cdot v$$

- Bsp: $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-VR. (In diesem Bsp sind die reellen Zahlen Vektoren und die rationalen Zahlen Skalare.)
  - $(\mathbb{R}, +)$ ist ab Grp.
  - Skalar-Mult.: $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ normale Mult.

  VR-Axiome erfüllt: Bsp. (b) $r, s \in \mathbb{Q}$, $v \in \mathbb{R}$

$$(r+s) \cdot v \overset{?}{=} r \cdot v + s \cdot v \quad \checkmark$$

- Bsp: Ist K ein Körper und $L \supseteq K$ ein Oberkörper, so ist L ein K-VR. $\quad K \subseteq L$

  Bew: Prüfe die VR-Axiome:

  (a) z.z: $\forall r \in K : \forall u, v \in L : r \cdot (u+v) \overset{?}{=} r \cdot u + r \cdot v$

  Da L ein Körper ist und $r \in K \subseteq L$ gilt das (nach 2.1.8(a)(iii))

  etc.

- Nicht Vektorraum: $K = \mathbb{R}$

$$V = (\mathbb{Z}, +, 0)$$

$r \in \mathbb{R}$, $v \in V$. $\quad r \bullet v := 0$

(a) $\underbrace{r \bullet (u+v)}_{=0} \overset{?}{=} \underbrace{r \bullet u}_{=0} + \underbrace{r \bullet v}_{=0} \quad \checkmark$

(b) $0 = 0 \ \checkmark$

(c) $\underbrace{(r \cdot s) \bullet v}_{0} \overset{?}{=} \underbrace{r \bullet (s \bullet v)}_{0}$ ✓

$r \cdot s$: Produkt im $\mathbb{R}$

(d) $1 \bullet v \overset{?}{=} v$

Ist nicht erfüllt. z.B.: $v = 5$ $\quad 1 \bullet 5 = 0 \neq 5$

- **Bsp:** I beliebige Menge. Dann ist K^I ist ein K-VR. (K: Körper)

Bsp vom Bsp: $I = \mathbb{N}$, $K = \mathbb{R}$

$$(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$\parallel$$
$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

Vektor-Addition: $(2, 3, 5, 0, 0, \dots) + (7, 7, -1, \tfrac{1}{2}, \dots)$
$= (9, 10, 4, \tfrac{1}{2}, \dots)$

Skalar-Mult: $4 \cdot (2, 3, 5, 0, 0, \dots) = (8, 12, 20, 0, 0, \dots)$

Formal: $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$(a_i)_i + (b_i)_i := (\underbrace{a_0 + b_0}_{c_0}, \underbrace{a_1 + b_1}_{c_1}, \underbrace{a_2 + b_2}_{c_2}, \dots)$$

$$= (c_i)_{i \in \mathbb{N}}, \text{ wobei } c_i = a_i + b_i$$

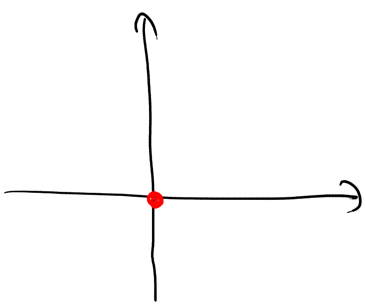
Alternative Schreibweise:

$$(a_i)_i + (b_i)_i := (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

Zu 0.7: $(i + 3)_{i \in \mathbb{N}} = (\underset{i=0}{3}, \underset{i=1}{4}, 5, \dots)$

Bsp. für UVR in $\mathbb{R}^2$

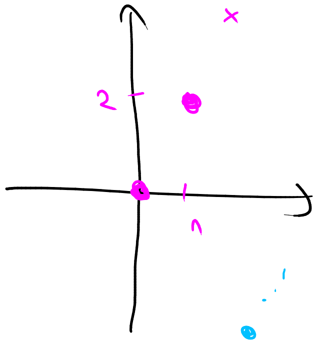
$U = \{(0,0)\} = \langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}}$



U ist abgeschlossen unter Vektoraddition,
d.h. $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$

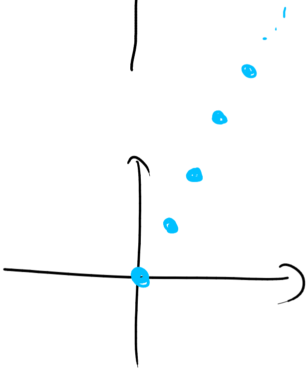
abgeschlossen unter Skalar-Mult,
d.h. $r \in \mathbb{R}, u \in U \Rightarrow r \cdot u \in U$

Also: U ist UVR.



$U = \{(0,0), (1,2)\}$

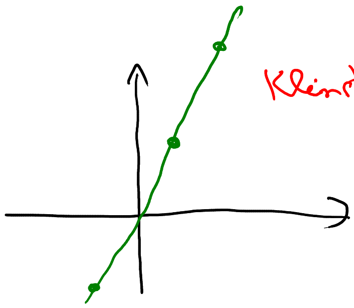
Kein UVR, da $(1,2) + (1,2) = (2,4) \notin U$



$U = \{(n \cdot 1, n \cdot 2) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(0,0), \underbrace{(1,2)}_{=(1\cdot 1, 1\cdot 2)}, \underbrace{(2,4)}_{=(2\cdot 1, 2\cdot 2)}, \underbrace{(3,6)}_{=(3\cdot 1, 3\cdot 2)}, \ldots\}$

Abg. unter +

Aber: $\frac{1}{2} \cdot (1,2) = (\frac{1}{2}, 1) \notin U$



Kleinster UVR, der $(1,2)$ enthält $= \langle (1,2) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle (1,2), (2,4) \rangle_{\mathbb{R}}$

$\| $

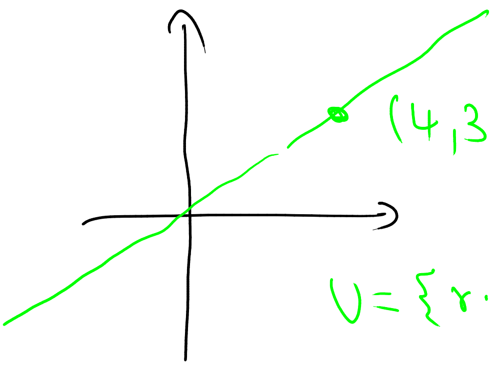
$U = \{(r \cdot 1, r \cdot 2) \mid r \in \mathbb{R}\} \ni (1,2)$

$\ni (\frac{9}{4}, \frac{9}{2})$

$\ni (-1, -2)$

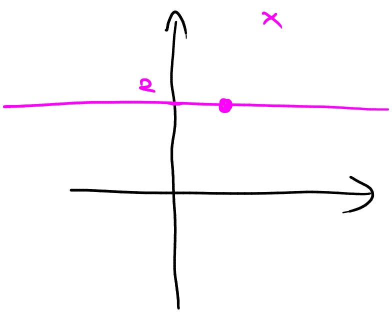
Das ist ein UVR: $s \cdot \underbrace{(\frac{9}{4}, \frac{9}{2})}_{\frac{9}{4}\cdot(1,2)} + \underbrace{(-1,-2)}_{-1\cdot(1,2)} = (\frac{41}{4}, \frac{41}{2}) = \frac{41}{4}(1,2)$

$= \underbrace{(s \cdot \frac{9}{4} - 1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot (1,2)$



$(4,3)$

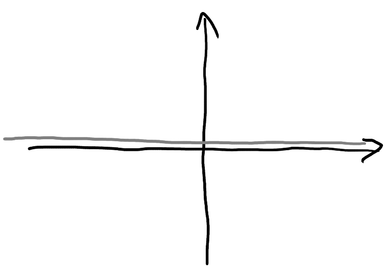
$U = \{r \cdot (4,3) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist UVR.



$U = \{(r, 2) \mid r \in \mathbb{R}\}$

$(1,2) \in U$, $(1,2) + (1,2) \notin U$

Also kein UVR.

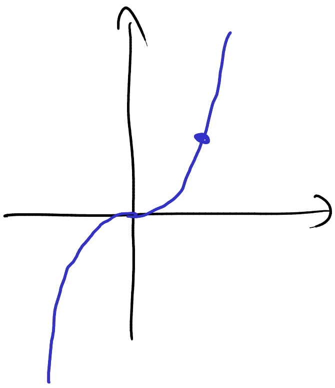


$U = \{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$

$s \cdot (r, 0) + (r', 0) \overset{?}{\in} U$

$= (s \cdot r + r', 0) \in U$ ✓

Ist $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ beliebig, so ist die Gerade, die durch $(0,0)$ und v geht ein UVR.

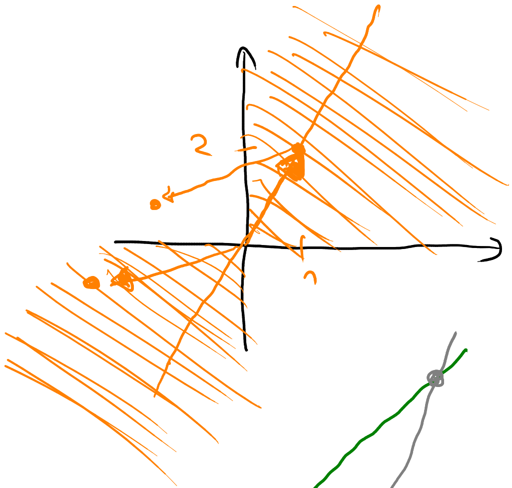


$U = \{(r, r^3) \mid r \in \mathbb{R}\}$

$(1,1) \in U$

$(1,1) + (1,1) = (2,2) \notin U$ Also kein UVR

$((2,8) \in U)$



$U = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a,b \geq 0 \text{ oder } a,b \leq 0\}$

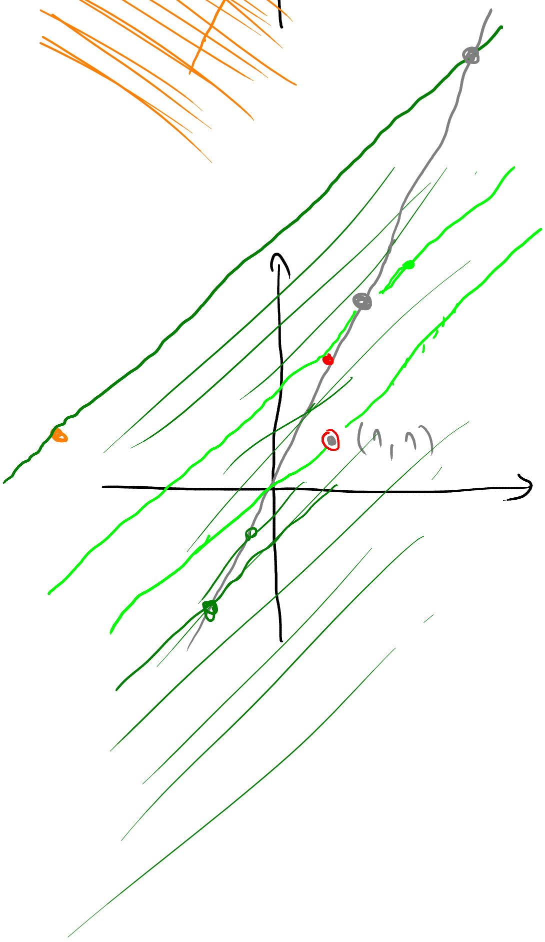
- Abg. unter Skal.-Mult:

  $(a,b) \in U$, $r \in \mathbb{R}$

  $(r \cdot a, r \cdot b) \in U$ ✓

- $(1,2) \in U$, $(-4,-1) \in U$

  $(1,2) + (-4,-1) = (-3,1) \notin U$



$U = \underbrace{\{r \cdot (1,2) \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{(1,1)\}}_{A}$

$\cup$???

Was muss noch dazu, damit es ein UVR wird?

- Muss auch (r,r) nach U tun, für $r \in \mathbb{R}$
- $(2,4) \in U$, $(r,r) \in U$

  $(2,4) + (r,r)$ muss nach U
- Analog für alle Punkte auf der grauen Gerade
- Am Bild sieht man: Erhalte $U = \mathbb{R}^2$

U = Lineare Hülle von A = kleinster UVR, der A enthält $= \langle A \rangle_{\mathbb{R}}$

In diesem Bsp: $\langle A \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$

$\langle (1,2), (1,1) \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$

Beweis von $\langle (1,2), (1,1) \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$

Lin-Komb von $(1,2), (1,1)$ sind:

$$\underbrace{r_1 \cdot (1,2)}_{\text{Grave Gerade}} + r_2 \cdot (1,1) \quad \text{für } r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

Lässt sich jedes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ in dieser Form schreiben?

Bsp: $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = (1,0,0,\dots) \\ v_1 = (0,1,0,0,\dots) \\ v_2 = (0,0,1,0,0,\dots) \\ \vdots \end{array}\right\} (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

(a) Ist $w_1 = (3,2,0,0,1,0,0,0,0,\dots)$ eine lin. Komb. von $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$?

(b) Ist $w_2 = (3,2,0,0,1,1,1,1,1,\dots)$ eine lin. Komb. von $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$?

(a) $w_1 = 3 \cdot v_0 + 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_4$

$= 3 \cdot v_0 + 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 + 0 \cdot v_5 + 0 \cdot v_6 + \dots$

$r_0 = 3 \quad r_1 = 2 \quad r_2 = 0 \quad r_3 = 0 \quad r_4 = 1 \quad r_5 = 0 \quad r_6 = 0 \dots$

Fast alle r_i sind 0.

einzige, die nicht 0 sind.

(a): ja

(b) $w_2 = 3 \cdot v_0 + 2 \cdot v_1 + 0 \, v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 + 1 \cdot v_6 + \dots$

alle nicht 0

Unendlich viele der r_i sind $\neq 0$. Also nicht erlaubt als Lin-Komb.

Bsp: $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$v_0 = (1,0,0,\dots 0 \dots)$

$v_1 = (1,1,0,0,\dots)$

$v_2 = (1,1,1,0,0,\dots)$

$3 \cdot v_0 + 2 \cdot v_1 + v_4 + v_5 + v_6 + \dots = (3,0,\dots) + (2,2,0,\dots)$

$+ (1,1,1,1,1,0,\dots) + (1,1,1,1,1,1,0,\dots) + \dots$

$= (\underbrace{3+2+1+1+\dots}_{=\infty\,??}, \dots\dots)$ Macht keinen Sinn.

Zu 3.2.5: $v \in \langle A \rangle_K$ gdw. v liegt in jedem UVR, der A enthält.

$V = \mathbb{R}^2$

Bsp: $A = \emptyset$ $v = (0,0)$

Jeder UVR von V enthält $(0,0)$, also $v \in \langle A \rangle_K$