Bsp: Gleichungssyst

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 3 \end{pmatrix}$$

Das ist ein Gl.-Syst.

zugehörige Koeff-Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Bsp-Aufgabe könnte sein: Beweisen Sie, dass das obige LGS keine Lösung hat.

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{1}{3}$

$4x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 2 \neq 3$

Also keine Lsg vom LGS.

2x 1. Gl. minus 2. Gl.:

$$\underbrace{(4x_1 + 8x_2 + 3x_3) - (4x_1 + 8x_2 + 6x_3)}_{=0} = \underbrace{2 \cdot 1 - 3}_{=-1}$$

Präziser Aufschrieb der Lösung der Aufgabe:

Wir nehmen an: x_1, x_2, x_3 ist Lsg des LGS.

Dann gilt: $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1$

Daraus folgt: $4x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 2$

Das ist ungleich 3, also ist (x_1, x_2, x_3) keine Lsg der 2. Gleichung.

Bzgl. „Kästchensumme": Ist ein Bsp für was definieren und dann was darüber beweisen.

Ein Beweis (einer Behauptung) ist irgend ein Text, der den Leser überzeugt, dass die Behauptung wahr ist.

Bsp:

Satz: Jede lin. Gleichung „$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$", bei der nicht alle Koeff $a_1, \dots, a_n$ null sind, hat mindestens eine Lösung.

- $x_1 + x_2 = 7$ Lsg $x_1 = 7, x_2 = 0$
- $0x_1 + 3x_2 = 7$ Lsg: x_1 beliebig, $x_2 = \frac{7}{3}$
- 1. Versuch: (für allg. Lösung): $x_1 = \frac{b}{a_1}$, $x_2 = \dots = x_n = 0$

Bew: Sei die Gleichung $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ wie in der Aufgabe gegeben.

Falls $a_1 \neq 0$ ist: wähle $x_1 = \frac{b}{a_1}$, $x_2 = \dots = x_n = 0$

Dies ist eine Lösung.

da $\underbrace{a_1 \cdot \left(\frac{b}{a_1}\right)}_{=b} + \underbrace{a_2 \cdot 0}_{=0} + \dots + \underbrace{a_n \cdot 0}_{=0} = b$ ist

Falls $a_1 = 0$ ist:

Mache Fallunterscheidung danach ob $a_2 = 0$ ist oder nicht.

Falls $a_2 \neq 0$: wähle $x_2 = \frac{b}{a_2}$, etc, analog zu oben.

Sonst: Wiederhole für $a_3, a_4 \dots$ etc. bis a_n.

Da nicht alle Koeff null sind (nach Voraussetzung) findet man auf diese Art eine Lösung. $\square$

Bew, 2. Version: Nach Voraussetzung sind nicht alle Koeff null. Wähle eine natürliche Zahl i zwischen 1 und n, so dass $a_i \neq 0$ ist.

Erhalte nun eine Lösung wie folgt: $x_i := \frac{b}{a_i}$.
Alle anderen Einträge der Lösung sind 0.
Dies ist in der Tat eine Lösung, da in „$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$" alle Summanden $=0$ sind außer der i-te Summand; der ist
$$a_i \cdot \left(\frac{b}{a_i}\right) = b.$$
Also ist die gesamte Summe $= b$.

Bsp:
$3x_1 + 5x_2 + 0x_3 = 7$
$a_1 = 3, \; a_2 = 5 \quad a_3 = 0$
Kann $i=1$ oder $i=2$ wählen (aber nicht $i=3$)
z.B. wähle $i=2$.
$x_2 := \frac{b}{a_2} = \frac{7}{5}$
$x_1 = 0, \; x_3 = 0$

Verknüpfung: Vorschrift, wie man aus 2 math. Objekten (Zahlen, Tupel, Gleichungen) ein neues math. Objekt erhält.
Bsp: Die „Kästchensumme" aus Aufg. 3.
Bsp: Verknüpfung von 2 Zahlen a, b

$$a \, B \, b := a^2 + 2 \cdot b$$

D.h.: Bsp: $3 \, B \, 6 = 3^2 + 2 \cdot 6 = 21$

Frage: Gilt für beliebige a und b: $a \, B \, b = b \, B \, a$?
Beh: Nein.
Bew. (durch Gegenbeispiel):
$3 \, B \, 6 = 21$ aber $6 \, B \, 3 = 6^2 + 2 \cdot 3 = 42$

Aufg. ähnlich wie Aufg. 1: ($a_1, \ldots, a_n$ wie in Aufg. 1)
(i) Das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$ ist null.
(ii) Es gibt (mindestens) ein i zwischen 1 und n (inklusive) so dass $a_i = 0$ ist.
i darf auch 1 oder n sein
(iii) $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

Bsp: $n=3$, $a_1=3$, $a_2=5$, $a_3=1$

(i) $3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$ also nicht wahr

(ii) Mögliche i: $i=1 \rightsquigarrow$ aber $a_1 \neq 0$

$i=2 \rightsquigarrow$ aber $a_2 \neq 0$

$i=3 \rightsquigarrow$ aber $a_3 \neq 0$

also nicht wahr

(iii) nicht wahr.

Bsp: $n=3$, $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=0$

(i) wahr

(ii) wahr (kann $i=1$ oder $i=3$ wählen)

(iii) falsch

Antwort: • (iii) bedeutet nicht das gleiche wie (i) und auch nicht das gleiche wie (ii). Bsp: $n=3$, $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=0$

• (i) und (ii) besagen das gleiche. Begründung:

Wenn (ii) wahr ist, kommt im Produkt $a_1 \cdots a_n$ eine 0 vor, also ist das gesamte Produkt gleich 0, also ist (i) wahr.

Wenn (i) wahr ist: Wenn das Produkt null ist muss auch (mind.) einer der Faktoren 0 sein; also ist (ii) wahr. $\square$

zu (ii) aus Aufg 1 vom echten Übungsblatt:

Bsp: $a_1=3$, $a_2=5$, $a_3=4$

Bsp vom Bsp: $i=1$, $j=3$. $a_1 \leq a_3$ ✓ Dann soll $i<j$ sein $1<3$. ✓

Bsp. vom Bsp: $i=3$, $j=1$: $a_3 \cancel{\leq} a_1$

Wie man Tupel addiert (wurde in Lemma 1.1.4 festgelegt):

Bsp: $(1,3,9)+(2,2,5)=(1+2,3+2,9+5)=(3,5,14)$

$$(a_1, \dots, a_n) @ (b_1, \dots, b_m) =$$

$$((a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m), (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots (a_n, b_m))$$