Bsp. für Äquiv-Rel:

$A = \{1, 2, 3\}$

Bsp. für eine Äqu-Rel auf A

Beispiel (*)

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 \sim 1 & 1 \sim 2 & 1 \not\sim 3 \\ 2 \sim 1 & 2 \sim 2 & 2 \not\sim 3 \\ 3 \not\sim 1 & 3 \not\sim 2 & 3 \sim 3 \end{array}}$$

Anderes Bsp:

$$\begin{array}{ccc} 1 \sim 1 & 1 \sim 2 & 1 \sim 3 \\ 2 \sim 1 & 2 \sim 2 & 2 \sim 3 \\ 3 \sim 1 & 3 \sim 2 & 3 \sim 3 \end{array}$$

$\leadsto$ Ist Äqu-Rel.

Ist das eine Äquiv-Rel?

(i) $1 \sim 1$, $2 \sim 2$, $3 \sim 3$ ✓

(ii) $2 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 2$? Ja. ✓

(iii) $1 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1$? Ja..... ✓

- Äquiv-Klasse von 1:

  $1 \sim 1$? Ja

  $2 \sim 1$? Ja

  $3 \sim 1$? Nein

  Also: Äquiv-Klasse von 1 ist $\{1, 2\}$

- Äqu-Kl von 2: $\{1, 2\}$
- Äqu-Kl von 3: $\{3\}$

$$A/\sim \; = \{\{1,2\}, \{1,2\}, \{3\}\}$$
$$= \underbrace{\{\{1,2\}, \{3\}\}}_{\text{Partition von } A}$$

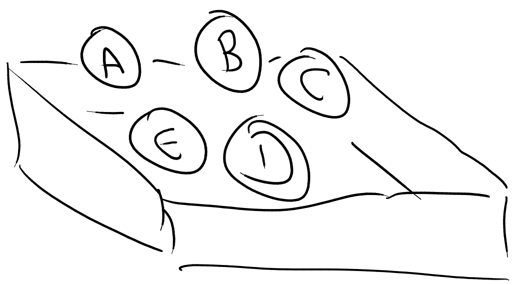
Im blauen Bsp:

Äqu-Klasse von 1 ist $\{1,2,3\}$.

$A/\sim \; = \{\{1,2,3\}\}$

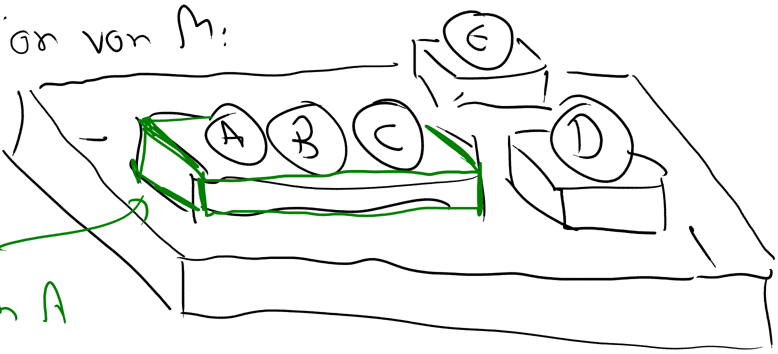
Partition einer Menge: Verteile alle Elemente in (mehrere) Kisten.

Zugehörige Äquiv-Rel sagt, ob zwei Elemente in der selben Kiste liegen.



M

Partition von M:



grüne Kiste ist Äquiv-Klasse von A

$\uparrow$

$A \sim B,\ A \sim C$

$A \sim A \qquad A \not\sim E$

Bsp: • $A = \{1,2\}$

$1 \not\sim 1 \qquad 1 \sim 2$

$2 \sim 1 \qquad 2 \not\sim 2$

$\leftarrow$ keine Äquiv-Rel, da $1 \not\sim 1$ ((i) verletzt)

• $A = \{1,2\}$

$1 \sim 1 \qquad 2 \not\sim 1$

$1 \sim 2 \qquad 2 \sim 2$

(ii) verletzt.

Bsp: $A = \mathbb{N}$

$a \sim b \ :\Leftrightarrow\ a < b$ keine Äquiv-Rel, da $5 \not\sim 5$

Bsp: $A = \mathbb{N}$

$a \sim b \ :\Leftrightarrow\ a \leq b$

(i) erfüllt.

(ii) verletzt da $2 \sim 3$ aber $3 \not\sim 2$

Bsp: $A = \mathbb{N}$

$a \sim b :\Leftrightarrow |a-b| \leq 2$

(i) ✓

(ii) ✓

(iii) $5 \sim 7$, $7 \sim 9$ aber $5 \not\sim 9$

Bew von 1.4.4 an Bsp: $A = \{1,2,3\}$, $\sim$ aus Beispiel (*), $a = 2$

z.z: $\exists^{=1}\ B \in A/\!\sim\ : a \in B$

$A/\!\sim\ = \{\{1,2\},\{3\}\}$, $a = 2$

$(2 \in \{1,2\},\ 2 \notin \{3\}$; also wahr$)$

(i) $B :=$ Äqui-Klasse von 2 (Also $B = \{1,2\}$)

$1 \in B$ da $1 \sim 2$

$2 \in B$ da $2 \sim 2$ gilt nach 1.4.1 (i) also $2 \in B$

$3 \notin B$ da $3 \not\sim 2$

(ii) Eindeutigkeit:

sei $B' \in A/\sim$ ..... so dass $\overset{2}{\overset{\shortparallel}{a}} \in B'$

1. Bsp: $B' = $ Äquiv.-Kl. von 1 $= \{1,2\}$

Hier kommt raus $B' = B$

2. Bsp: B' ist Äquiv.-Kl. von 3 $= \{3\}$

$2 \notin B'$, interessiert mich nicht.

Bsp 1.4.2: $m = 5$

$15 \sim 9$? $\quad 15 - 9$ durch 5 teilbar? Nein; also $15 \nsim 9$.

Bsp: • $\mathbb{Z}$ ist ein Ring:

Prüfe dafür: (i) $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ist abelsche Gruppe:

GruppenAx:
- 2.1.1. (i) Assoz: $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: a+(b+c) = (a+b)+c$ ✓
- 2.1.1. (ii)
- 2.1.1. (iii) $\forall a \in \mathbb{Z} \ \exists b \in \mathbb{Z}: a+b = 0 \wedge b+a = 0$

2.1.1. (iv) $\forall a,b \in \mathbb{Z}: a+b = b+a$

(ii) $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ✓

$\forall a \in \mathbb{Z}: 1 \cdot a = a \wedge a \cdot 1 = a$

(iii) Distrib.

Also ist $\mathbb{Z}$ ein Ring.

• Ist $\mathbb{Z}$ ein Körper?

Dazu zu prüfen: $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist ab. Grp:

2.1.1. (i) + (ii): ✓

2.1.1. (iii) $\forall a \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \ \exists b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}: a \cdot b = 1$?

Nein: z.B. $a = 3$. Ex. $b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}: 3 \cdot b = 1$.

„Ist kein Körper, da „$\frac{1}{3}$" in $\mathbb{Z}$ fehlt"

Bsp: Mit $\mathbb{Q}$ statt $\mathbb{Z}$ geht alles wie bei $\mathbb{Z}$. Und außerdem:

2.1.1. (iii) $\forall a \in \mathbb{Q}\setminus\{0\} \ \exists b \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}: a \cdot b = 1$?

Ja: Wähle $b := \frac{1}{a}$.

Bsp: Mit $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{Z}$ gelt auch alles.

Bsp: $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ist Gruppe

$(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ ist keine Gruppe da 3 kein Inverses hat

Ein Inverses wäre ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $3 \cdot b = 1$

$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist keine Gruppe

---

zum Beweis von 2.1.6 $G = G_1 \times G_2$ (der Einfachheit halber)

(i) siehe Vorl.

(ii) ...

(iii) Existenz von Inversen:

Sei $\underline{a} = (a_1, a_2) \in G$ gegeben. Suche $\underline{b} \in G$ mit $\underline{a} \circ \underline{b} = (e_1, e_2)$

Wähle: $\underline{b} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}) = (b_1, b_2)$. Dann: $\underline{a} \circ \underline{b} = (a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2)$

$= (a_1 \circ a_1^{-1}, a_2 \circ a_2^{-1})$

$= (e_1, e_2)$ ✓

Jeder Körper ist ein Ring.

Jeder Ring ist (mit +) eine Gruppe.

Bsp: $R = \{0\}$. $1 = 0$ $0 + 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$

Das ist ein Ring.

Das ist kein Korper, da $R \setminus \{0\}$ keine Gruppe ist. (Ist leer, enthält also insbes. kein neutrales Element.)

Bsp: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

$0 + 0 = 0$ $0 \cdot 0 = 0$

$0 + 1 = 1$ $0 \cdot 1 = 0$

$1 + 0 = 1$ $1 \cdot 0 = 0$

$1 + 1 = 0$ $1 \cdot 1 = 1$

Wir werden sehen:
In Kp. gilt: $\forall a$: $a \cdot 0 = 0$
$0 \cdot a = 0$

Das ist ein Körper.

↳ Entweder prüfe alle Bedingungen von Hand.

$1 + 1 = 1$ wäre nicht gegangen, da: Brauche $a \in \mathbb{F}_2$ mit $a + 1 = 0$ so ein a gäbe es nicht, wenn $1 + 1 = 1$ wäre.

Andere Sichtweise: $0 = g$ = „gerade"

$1 = u$ = „ungerade"

Bsp

$g + g = g$ $\quad 2+6=8 \quad g \cdot g = g$

$g + u = u$ $\quad 2+5=7 \quad g \cdot u = g$

$u + g = u$ $\quad \vdots \quad u \cdot g = g$

$u + u = g$ $\quad 5+3=8 \quad u \cdot u = u \quad 5 \cdot 3 = 15$

$$(g+g)+g = g+(g+g)$$

Variante dieser Sichtweise:

G = Menge der ger. Zahlen $= \{\ldots -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

U = Menge der unger. Zahlen $= \{\ldots -5, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$

$a \in G, b \in G \Rightarrow a+b \in G$

$a \in G, b \in U \Rightarrow a+b \in U$

$\vdots$

$a \in U, b \in U \Rightarrow a \cdot b \in U$

$\{G, U\}$ ist eine Partition von $\mathbb{Z}$, nämlich:

$\mathbb{Z}/\sim$ wobei $a \sim b \Leftrightarrow a-b$ durch 2 teilbar

Also Bsp 1.4.2 für $m=2$:

- Äquiv.-Klasse von 0: $\{\ldots -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} = G$
  = Äquiv.-Klasse von 2;
- Äqu-klasse von 1: $\{\ldots -5, -3, -1, 1, 3, \ldots\} = U$

alle Zahlen b, so dass $b \sim 1$, d.h. so dass $b-1$ gerade ist.

$$\mathbb{Z}/\sim = \{G, U\}$$

Bsp: $A = \mathbb{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow a$ und b haben gleich viele Ziffern

$$\mathbb{N}/\sim = \{\{0, \ldots 9\}, \{10, \ldots 99\}, \{100, \ldots, 999\}, \ldots\}$$

unendl. viele verschiedene Äquiv.-Klassen.

Die Zahlen 1, 10, 100, 1000, ... sind alle nicht äquiv. zueinander. Also unendl viele verschiedene Äquiv-klassen