Menge der Primzahlen:

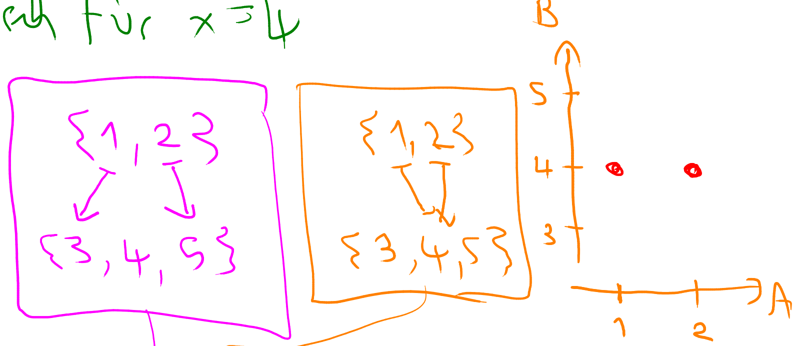
$$\{x \in \mathbb{N} \mid \forall m,n \in \mathbb{N}: ((m \cdot n = x) \Rightarrow (m=1 \vee n=1))\}$$

$x = 4$

wahr für	$m=1, n=4$	wahr	wahr
	$m=2, n=2$	falsch	falsch
	$m=4, n=1$	wahr	wahr

Falsch für $x=4$

Definition von Abbildung:



$A = \{1, 2\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

Erlaubte G:
- $\{(1,3), (2,5)\}$ — $f(1)=3$, $f(2)=5$
- $\{(1,4), (2,4)\}$ — $f(1)=4$, $f(2)=4$
- $\{(1,3), (2,3)\}$

⋮

(insgesamt neun verschiedene Abb von A nach B)

Nicht erlaubte G:
- $\{(1,3)\}$ (für $2 \in A$ existiert kein $b \in B$ mit $(2,b) \in G$)

  Hier wäre $f(2)$ nicht definiert

- $\{(1,3), (2,5), (2,4)\}$

  doppelt

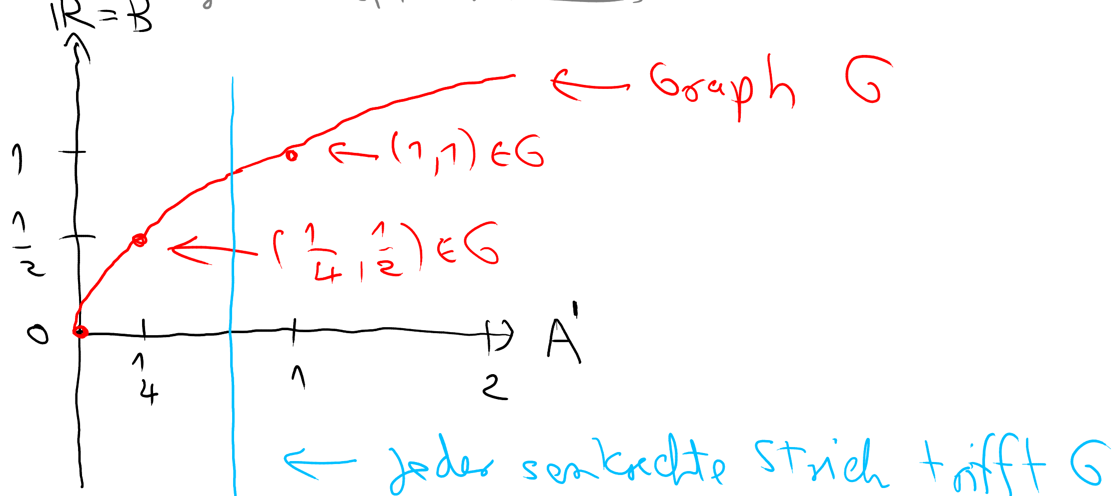
  Hier wäre $f(2)$ doppelt definiert: $f(2)=5$, $f(2)=4$

- Ist $f(x) = \sqrt{x}$ eine Abb?
  - Falls $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$: Nein, da -1 keine Wurzel hat.
  - Setze $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $B = \mathbb{R}$
  - Mit der Notation „$\sqrt{x}$" ist üblicherweise die nicht-

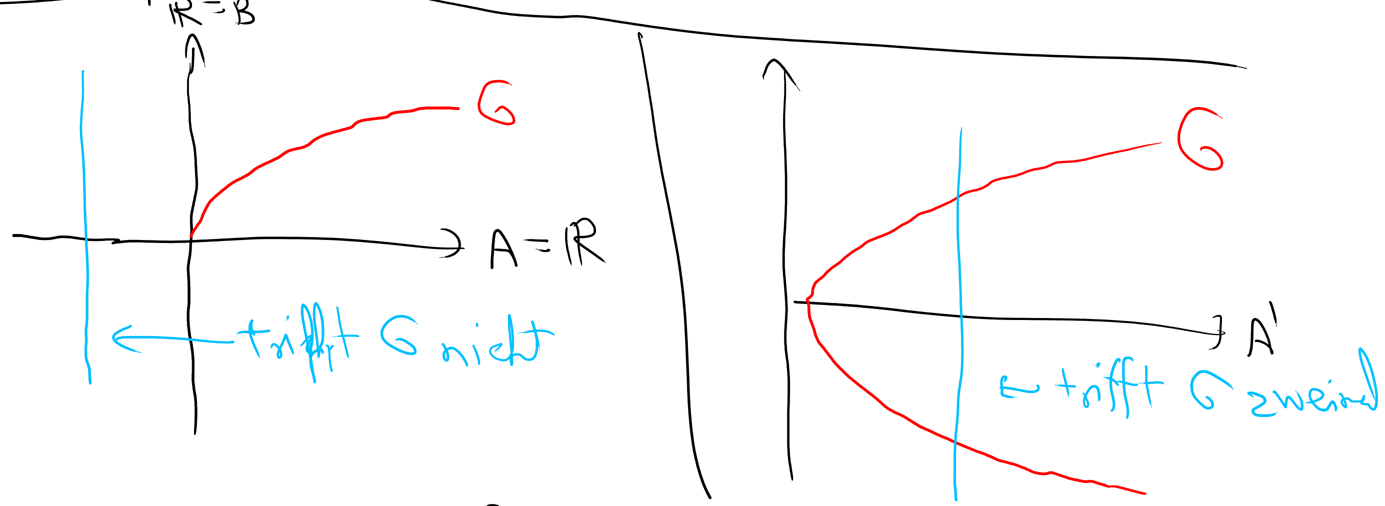
negative Wurzel von x gemeint. Mit dieser Interpretation ist $f: A' \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abb.

(• $G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y$ ist eine Wurzel aus x (negative Wurzel auch erlaubt) $\}$

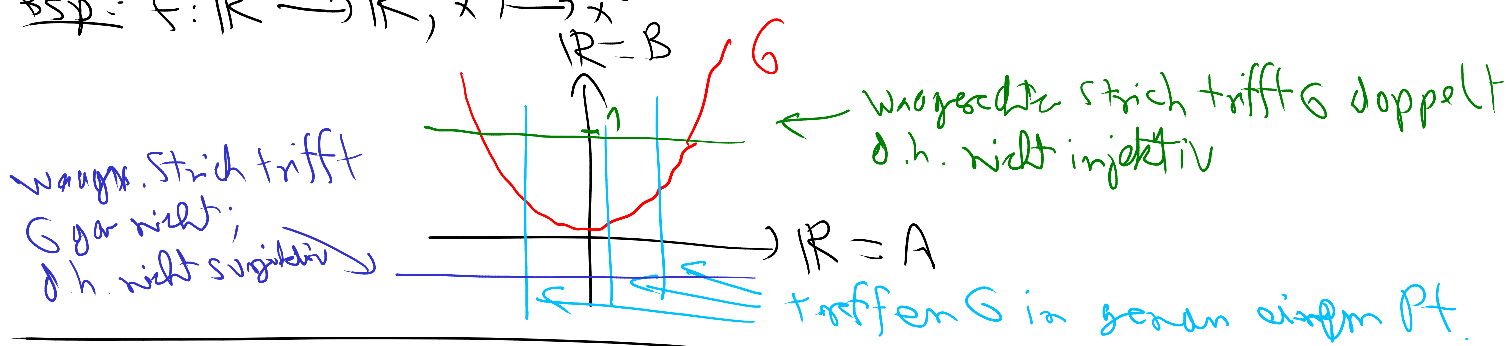
Diese Menge G definiert **keine** Abb.)



Nicht-Beispiele:



Bsp: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto x^2$



Bsp: $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad (f(x) = x^2)$

$x \longmapsto x^2$

$G = \{ (0,0), (1,1), (2,4), \ldots$
$(-1,1), (-2,4), \ldots \}$

Nicht surjektiv, da der Wert 3 nie angenommen wird.

Ist ok. Aber nicht injektiv, da (z.B.) 4 zweimal als Wert angenommen wird.

Injektiv heißt: Bei den Paaren $(a,b) \in G$ darf kein b doppelt vorkommen.

Surjektiv heißt: Jedes $b \in B$ taucht in (mindestens) einem Paar $(a,b) \in G$ auf.

Bijektiv heißt: sowohl inj als auch surj

- $A = \{1,2,3\}$

  $B = \{1,2\}$

  surjektiv aber nicht injektiv — also auch nicht bij — da 1 doppelt getroffen

  Urbild von $\{1,2\}$ ist $\{1,3\}$

- $A = \{1,2,3\}$

  $B = \{1,2,3,4\}$

  Urbild von 4 ist $\emptyset$.

  inj. aber nicht surj — also auch nicht bij — da 4 nicht getroffen

  Urbild von 1 ist $\{1,2\}$

- $A = \{1,2,3\}$

  $B = \{1,2,3\}$

  weder inj noch surj

  also erst recht nicht bij

- $A = \{1,2,3\}$

  $B = \{1,2,3\}$

  sowohl inj als auch surj

  also bijektiv

  $f: 1 \longmapsto 3,\ 2 \longmapsto 1,\ 3 \longmapsto 2$

- Ist $f: A \longrightarrow B$ bijektiv, so kann man die Pfeile auch rumdrehen und erhält eine Abb von B nach A:

  $A = \{1,2,3\}$

  $B = \{1,2,3\}$

  „Rumgedrehte Abb" nennt man Umkehrabb. und schreibt f^{-1}:

  $1 \longmapsto 2,\ 2 \longmapsto 3,\ 3 \longmapsto 1$

- $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ n \longmapsto n$ ist bijektiv

gleiche Notation, bedeutet aber nicht ganz das gleiche

- $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\quad f(0) = 1,\ f(1) = 0,\ f(n) = n$ falls $n \geq 2$, ist bijektiv.

Urbild: $f: A \longrightarrow B$ beliebig, $b \in B$.
Das Urbild von b ist die Menge der $a \in A$, die auf b abgebildet werden. Notation dafür: $f^{-1}(b)$

Allgemeiner: Urbild einer Menge $B' \subset B$ sind alle a mit $f(a) \in B'$.

---

zu 1.2.10 (b)

$$M = \{2,3\}$$

$$M^3 = \{(2,2,2),(2,2,3),(2,3,2),(2,3,3),(3\ldots$$

(insges hat M^3 8 Elemente.)

$$\sum_{i=1}^{n} T(i) = T(1) + \ldots + T(n)$$

Präzise Definition davon: („rekursive Definition")

Wir definieren: Für $n=0$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{0} T(i) := 0$

Für $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} T(i) := \left(\sum_{i=1}^{n-1} T(i)\right) + T(n)$

Bsp: $T(i) = i^2$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{4} i^2}_{} + 5^2 = 0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$n=4$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{3} i^2}_{} + 4^2$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{2} i^2 + 3^2}_{0+1^2+2^2+3^2}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{1} i^2 + 2^2}_{0+1^2+2^2}$$

$n=0$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{0} i^2}_{=0} + 1^2 = 0 + 1^2$$

$f : A \longrightarrow B$

$g : B \longrightarrow C$

$h : A \longrightarrow C$

$h(x) := g(f(x))$

Dieses h schreibt man $g \circ f$.

---

n lässt sich als Summe von drei verschiedenen Quadratzahlen schreiben:

$$\Longleftrightarrow \quad \exists M \subset \mathbb{N} : \left(\#M = 3 \wedge \quad n = \sum_{x \in M} x^2 \right)$$