Bsp: $\underline{L} = \left(\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{array} \right)$

hat Koeff-Matrix:

Pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \end{array}\right)$$

x_1 x_2 x_3

Kein Pivot in der Spalte; also frei wählen

Pivot; also ausrechnen.

Ist schon in Zeilenstufenform.

Laut Vorlesung:

Darf x_3 beliebig wählen

Danach: • $x_2 = 3 - x_3$

• $x_1 = 2 - x_3$

Bsp: $x_3 = 7$

2. Gleichung besagt: Muss jetzt $x_2 = -4$ wählen.

(soll $x_2 + x_3 = 3$ haben. Also $x_2 + 7 = 3$. Also $x_2 = -4$)

1. — " ———— $x_1 = -5$ wählen.

(soll $x_1 + x_3 = 2$. Also $x_1 + 7 = 2$, also $x_1 = -5$)

Andere Möglichkeit, Lösungen von $\underline{L}$ zu finden (nicht nach Vorlesung):

Wähle $x_1 = 1$ (auf gut Glück)

Da $x_1 + x_3 = 2$ sein soll, muss jetzt $x_3 = 1$ wählen.

Da $x_2 + x_3 = 3$ — " ———— $x_2 = 2$ — " —

Beide Gl. erfüllt. Habe also Lsg.

Wenn ein LGS viele Lsg hat, kann man manche Var. frei wählen und dann die restlichen ausrechnen. Manchmal gibt es verschiedene Möglichkeiten, sich auszusuchen, welche man frei wählt.

Bsp: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\qquad x_1 = 2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_2 + x_3 = 2$

In diesem Fall: • x_1 fert.

• Wahlweise: Wähle x_2 und rechne x_3 aus

oder: Wähle x_3 und rechne x_2 aus

Bsp: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \cdot(-1)$

$L_1 =$ „$x_1 + x_3 = 2$"

$L_2 =$ „$x_2 + x_3 = 3$"

$L_3 = L_1 + L_2 =$ „$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 5$"

Gut.

Pivot $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \cdot(-1)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

x_3 frei wählen

ausrechnen (wie vorher)

Bsp: will $\neq 0$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \leftrightarrow$ will $= 1$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \cdot\left(\frac{1}{2}\right)$

will $= 0$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \cdot(-1)$ $\qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \cdot(-3)$

will $= 0$

will = 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -\frac{9}{2} & -1 \end{array}\right) \quad \left(\cdot \frac{1}{2}\right)$$

Gut.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -\frac{9}{2} & -1 \end{array}\right) \quad (\cdot 3)$$

will = 0

Gut.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{21}{2} & 2 \end{array}\right) \quad \cdot(-2)$$

Rechenfehler

Gut

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right) \quad \cdot\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)$$

$x_4 = 0$

$x_3 = 1 - \frac{9}{2} \cdot 0 = 1$

$x_2 = 1 - 1 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 0$

$x_1 = 2 - x_2 - x_3 - \frac{3}{2} x_4 = 1$

Bsp.: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$x_3 = a \qquad x_2 = 2 - a \qquad x_1 = 2$

---

w = wahr   f = falsch

Bsp:

$A(n) =$ „$n > 5$"

$B(n) =$ „$n < 8$"

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
$A(n)$ = „$n > 5$"	f	f	f	f	f	f	w	w	w	w	…
$B(n)$ = „$n < 8$"	w	w	w	w	w	w	w	w	f	f	…
„$n > 5 \wedge n < 8$"	f	f	f	f	f	f	w	w	f	f	…
„$n > 5 \vee n < 8$"	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	…

Bsp: $A(n) =$ „n ist keine Quadratzahl"
$B(n) = n > 1$

Frage: Gilt $A \Rightarrow B$?

- Ja für natürliche Zahlen n
  (da 0, 1 Quadratzahlen sind)
- Nein für ganze Zahlen n
  (da -1 keine Quadratzahl ist)

Also: Frage schlecht gestellt, da „$A \Rightarrow B$" von n abhängt.

Bessere Frage: Für welche n gilt: „$A \Rightarrow B$"?

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
„n ist Quadratzahl"	f	f	f	w	w	f	f	w	f
A	w	w	w	f	f	w	w	f	w
B	f	f	f	f	f	w	w	w	w
$A \Rightarrow B$	f	f	f	w	w	w	w	w	w

Beschreibung von $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ durch Wahrheitstafeln:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftarrow B$
f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	w	f
w	f	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

A	$\neg A$
f	w
w	f

Aus der Vorlesung:

Satz 1.2.3:

$$\Big(\big((\neg A) \Rightarrow B\big) \wedge \underbrace{(\neg B)}\Big) \Rightarrow A$$

Wenn das gilt und $\underbrace{\text{das gilt}}_{B \text{ ist falsch}}$, dann gilt das.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \Rightarrow B$	$((\neg A) \Rightarrow B) \wedge \neg B$	$(((\neg A) \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow A$
f	f	w	w	f	f	w
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	w	f	w
w	w	f	f	w	f	w

Also: Satz immer wahr.

Auf dem Übungsblatt: „$\exists$"

$$\underbrace{\exists x \in \mathbb{Z} : A(x)}$$

Aussage über x

Es gibt (mindestens) eine ganze Zahl x, so dass $A(x)$ wahr ist.