Det. bestimmen mit Zeilen/Spaltentransf.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notation: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-3) \\ \cdot 3 \\ \\ \end{matrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Bsp:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\cdot(-2)$

$A \in K^{n \times n}$

$\det A = 0$

$\Updownarrow$

A nicht invertierbar

$\Updownarrow$

$\operatorname{rk} A < n$

$\parallel$

Zeilenrang $< n \Leftrightarrow$ Zeilen lin. Abh.

$\parallel$

Spaltenrang $< n \Leftrightarrow$ Spalten lin. Abh.

Bsp:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & & 5 \\ & & & 4 & \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

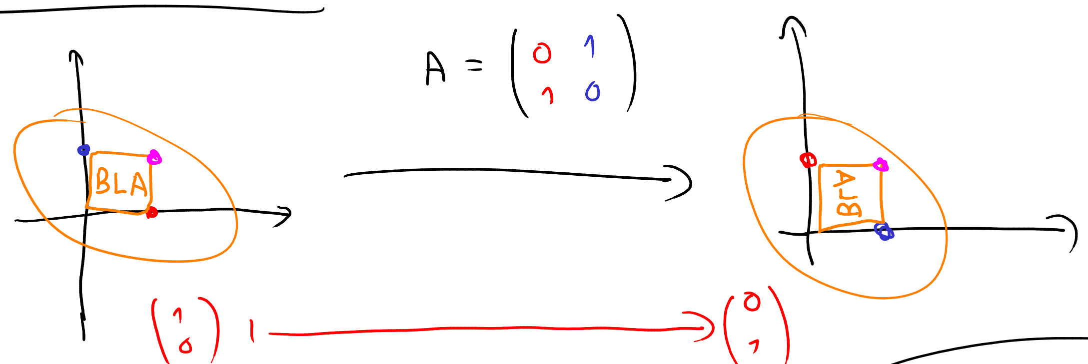
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$\begin{vmatrix} & & & & & 2 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ 2 & & & & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\ \\ \\ \\ \\ \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \end{matrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}}_{=1}$$

$$= -4$$

(-1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} (-1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Entwickle nach 1. Spalte (5.1.5 (a)) $l=1$

$$+1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

.... viel Rechenarbeit.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{-2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = -3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = -2$$

entwickle nach 3. Zeile, d.h. 5.1.5 (b) $k=3$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - 1\cdot 1 = 3$$

$$= 1\cdot 3 - 2\cdot(-1) + 1\cdot(-7) = 3 + 2 - 7 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 1\cdot 2 = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 4\cdot 2 = -7$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c$$

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -b\cdot c + d\cdot a$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a\cdot e\cdot i - a\cdot f\cdot h - b\cdot d\cdot i + b\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h - c\cdot e\cdot g$$

Merkregel:

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

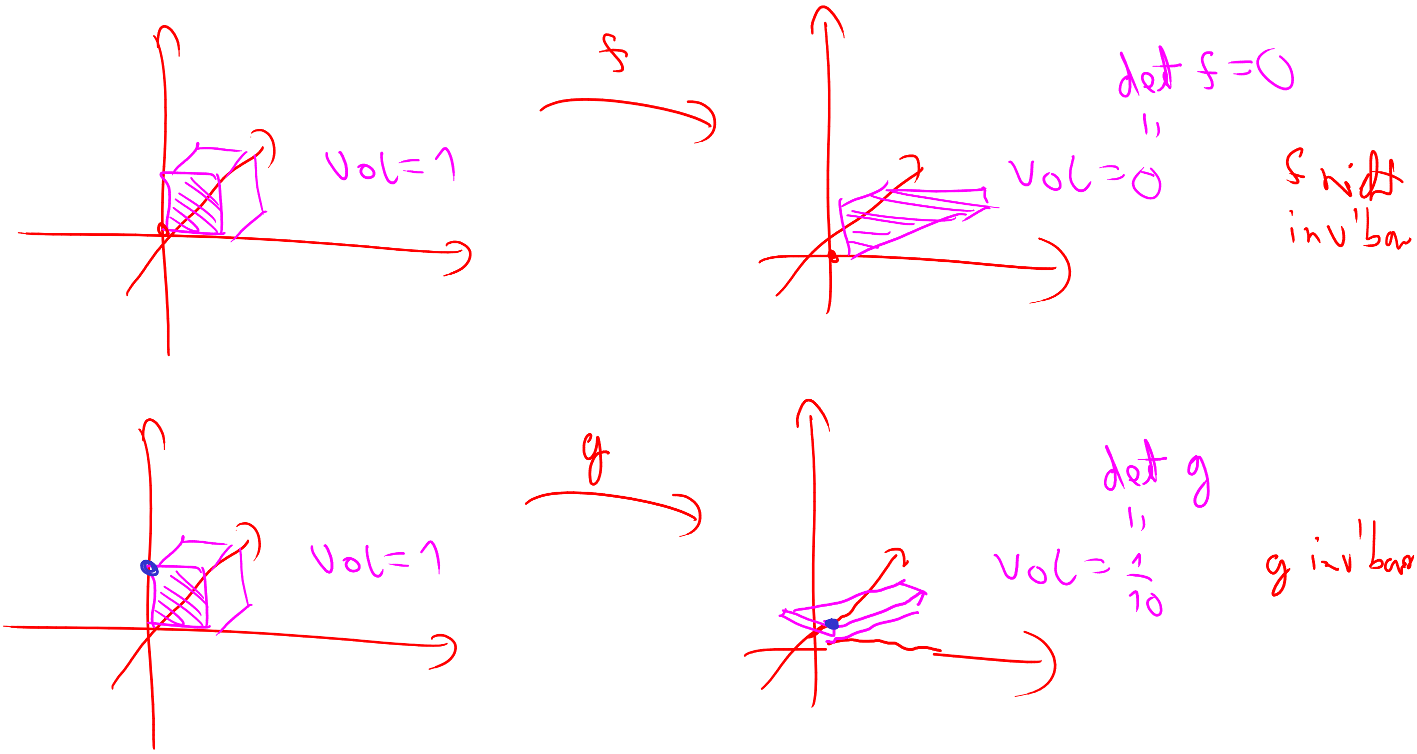
$$\boxed{\text{Nur für 3×3-Matrizen!}}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix} = \underbrace{1\cdot 4\cdot 1}_{4} + \underbrace{2\cdot 1\cdot 2}_{4} + \underbrace{1\cdot 1\cdot 1}_{1} - 1\cdot 4\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1$$

$$= 4 + 4 + 1 - 8 - 1 - 2 = -2$$

In $\mathbb{F}_5$: $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 3\cdot 3 - 1\cdot 1 = 9-1 = 4-1 = 3$

$\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$



„det g ist der „Abstand" von g zu einer nicht inv'baren Abb"

Lineare Abb bilden Gerade auf Geraden ab

Lineare Abb bilden parallele Gerade auf parallele Geraden ab

$$\begin{vmatrix} a_1 & * & * & * \\ 0 & a_2 & * & * \\ 0 & & a_3 & * \\ 0 & & & a_4 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & * & * \\ & a_3 & * \\ & & a_4 \end{vmatrix}}$$

$$= a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & * \\ & a_4 \end{vmatrix} = a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$$