Bsp für lin. Abb

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

  $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3y \\ 4x+2y \end{pmatrix}$

  „Probe an Bsp": $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad r = 2$

  $rv + v' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad f(v') = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

  $f(\text{—"—}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\qquad 2 \cdot \text{—"—} \quad + \quad \text{—"—}$

  $= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 20 \end{pmatrix}$

- $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 4x_4 \\ x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$

  ⚠ Das Wort „linear" hat je nach Kontext leicht verschiedene Bedeutung.

- Sind die folgenden Abb. linear?
  - $\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$

    $x \longmapsto 2x+1$ $\qquad$ ($2x+1$ ist ein lineares Polynom)

    Das ist <u>keine</u> lin. Abb im Sinne von 4.2.1

    $v = 0 \quad v' = 0 \quad r = 1$

    $f(r \cdot v + v') = f(0) = 1$ $\quad \neq$

    $r \cdot f(v) + f(v') = 1 \cdot f(0) + f(0) = 1 + 1 = 2$

    Dieses „+1" ist das Problem.

  - $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (Ist die Abb. zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

• $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \cdot y \\ 0 \end{pmatrix}$

Nicht linear.

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r = 1$

$$f(v+v') = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq f(v) + f(v') = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hom: $\mathbb{F}_5^2$, $\mathbb{F}_5^3$

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$:

$$\ni f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 3y \\ 4x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 0y \\ 0x + 3y \\ 4x+2y \end{pmatrix}$$

Das ist die Abb zur Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$$\left\{ \underset{\mathbb{F}_5^2}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underset{\mathbb{F}_5^3}{\mathbb{R}^3}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \\ ex+fy \end{pmatrix} \;\middle|\; \underbrace{a,b,c,d,e,f \in \underset{\mathbb{F}_5}{\mathbb{R}}} \right\}$$

$$\#\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_5^2, \mathbb{F}_5^3) = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 15625$$

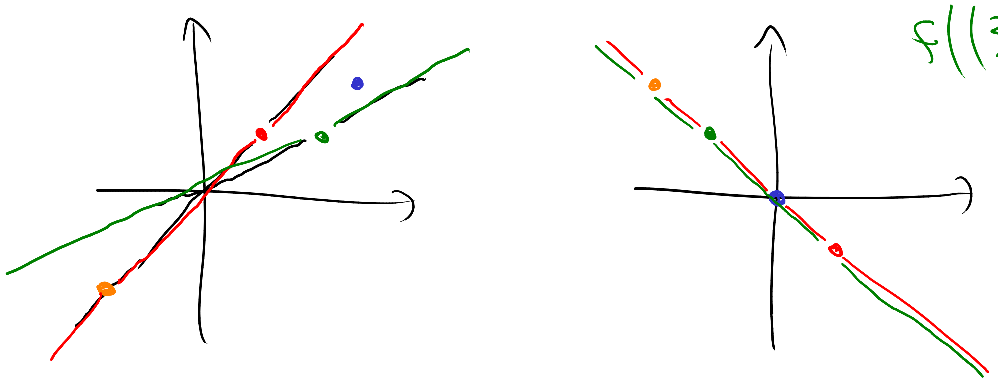
$$\ni g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x + 1y \\ 1x + 1y \\ 0x + 0y \end{pmatrix}$$

$h := f + g$

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 3y + x + y \\ 4x+2y+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot x + y \\ x + 4y \\ 4x+2y \end{pmatrix}$$

Gibt es eine lin. Abb $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$?



$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Also: Ja nach 4.2.6.

$$\underbrace{f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)}_{= f\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)} = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

f linear $\Rightarrow f(0)=0$

$\underbrace{f(rv+0)}_{= f(r\cdot v)} = \underbrace{r\cdot f(v)+0}_{= r\cdot f(v)}$

$$f\left(\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\right) = f\left(-2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = -2\cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = -2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

$$f\left(a\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = a\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

<u>Was ist die Matrix zu f?</u>

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$1a + 2\cdot b = x$

$1\cdot a + 1\cdot b = y$

x, y gegeben; a, b gesucht

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & x\\ 1 & 1 & y\end{array}\right) \cdot(-1) \qquad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & x\\ 0 & -1 & y-x\end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & x\\ 0 & 1 & x-y\end{array}\right)\\ \uparrow\ \ \uparrow\quad\ \\ a\ \ \ b\quad\ \end{array}$$

$b = x - y$

$a = x - 2\cdot(x-y) = -x + 2y$

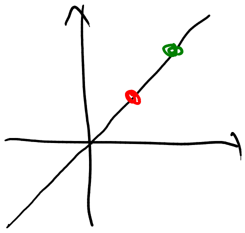
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (-x+2y)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

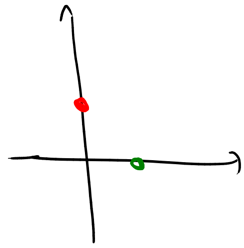
$$f(\text{—''—}) = f(\text{—— '' ——}) = (-x+2y)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-x+2y & -x+y\\ x-2y & +x-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x+3y\\ 2x-3y\end{pmatrix}$$

Zug. Matrix: $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

Nicht-Bsp für 4.2.6:





$$f: \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Das kann keine lin. Abb. machen
(Da $f\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) = 2 \cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ sein müsste)

Um eine lin. Abb. von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^5$ anzugeben, reicht es, die Abb. auf einer Basis von $\mathbb{R}^3$ anzugeben, also insbes. auf 3 Vektoren, also z.B.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}2\\3\\3\\4\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- Gibt es eine lin. Abb. von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, die Vektoren der Form $\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}$ auf Vektoren der Form $\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$ abbildet?

Ja, z.B. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}y\\2\cdot x\end{pmatrix}$

oder $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\2x\end{pmatrix}$

oder $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$??

Ist das linear? Nein

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \neq f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Ist $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ eine Basis? Schlecht gestellte Frage! $\qquad \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

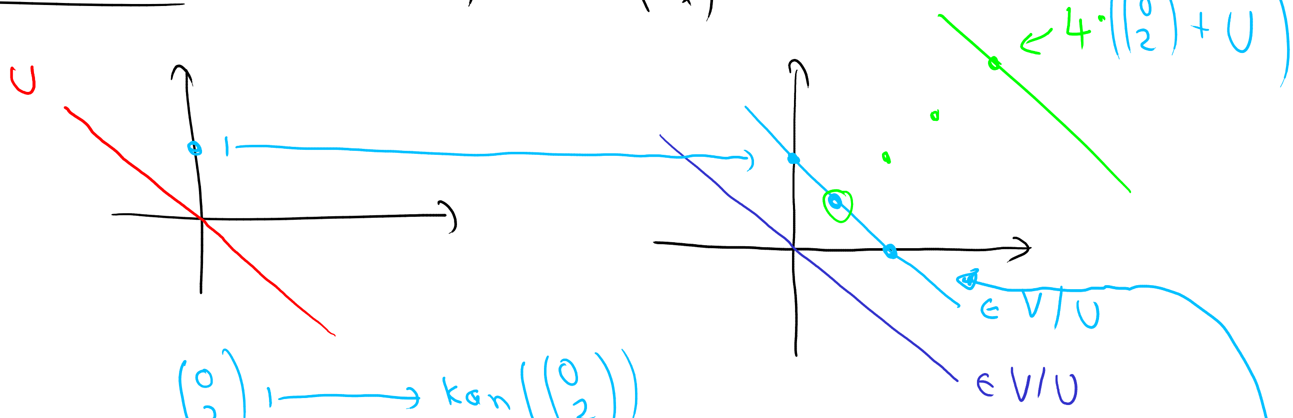
Besser: ... Basis von $\mathbb{R}^2$? Nein. $\qquad$ ||

... Basis eines UVR von $\mathbb{R}^2$? Ja, nämlich Basis von $\left\{\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

Allgemein: Sind $v_1, \ldots, v_k \in V$ l.u., so bilden $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle_{\mathbb{R}}$

$$I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} \qquad I_3 \cdot v = \begin{pmatrix}1\cdot3+0\cdot2+0\cdot4\\0\cdot3+1\cdot2+0\cdot4\\0\cdot3+0\cdot2+1\cdot4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$$

Bsp zu 3.5.7: $\quad V=\mathbb{R}^2, \quad U=\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\}$



$$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \longmapsto \mathrm{kon}\left(\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$\boxed{v+U=U \Leftrightarrow v\in U}$$

$$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+U = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\2-x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\}$$

Was sind lineare Abb von V/U nach $\mathbb{R}^3$?

Basis von V/U: $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+U$

Bsp f: $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+U \longmapsto \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}+U \longmapsto \begin{pmatrix}\frac{1}{2}a\\a\\\frac{3}{2}\cdot a\end{pmatrix}$$