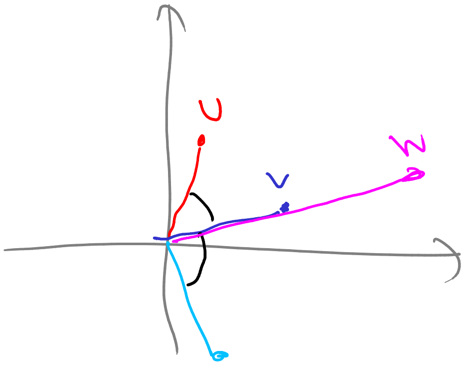
6 Euklidische und unitäre Vektorräume

$\mathbb{R}^2$



Fragen: • Winkel zw zwei Vektoren?

• Längen vergleichen?

$w = 2\cdot v$

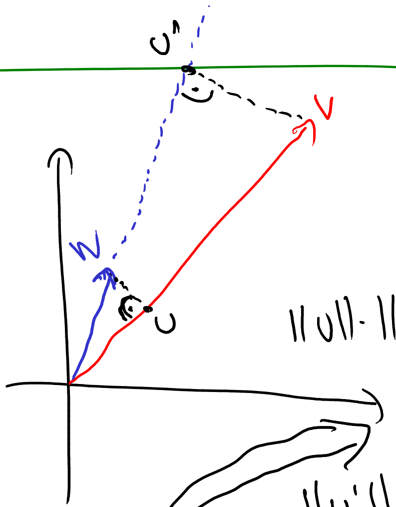
In $\mathbb{R}^n$: $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Länge von v ist $\|v\| := \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$

In diesem Kapitel sei $\mathbb{K}$ immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

V n-dim $\mathbb{R}$-VR. Was soll dann die Länge sein? „v" w $v^T\cdot \bar{w}$

6.1 Skalarprodukt



$\|u\|\cdot\|v\|$

$\|$

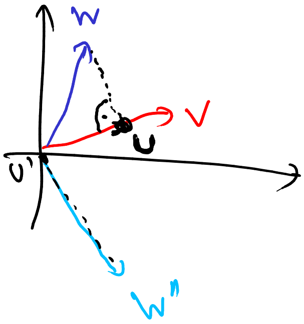
$\|u'\|\cdot\|w\|$

$\frac{\|v\|}{\|u'\|} = \frac{\|w\|}{\|u\|}$

In $\mathbb{R}^2$: $\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{a_1\cdot \bar{b}_1 + a_2\cdot \bar{b}_2}_{\langle v,w\rangle}$

In $\mathbb{C}^2$:

$\langle v,w\rangle = \|v\|\cdot\|w\| \geq \|u\|\cdot\|v\|$



$\langle v, w'\rangle = \|u'\|\cdot\|v\| = 0$

Also: $\langle v,w\rangle = 0$ gdw v und w stehen senkrecht zueinander.

$\langle v,v\rangle = \|v\|\cdot\|v\|$

$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

$\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\|$

Def 6.1.1: Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Ein (reelles) Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v)\longmapsto \langle u,v\rangle$, so dass für alle $u,u',v,v'\in V$ und $r\in\mathbb{R}$ folgendes gilt:

(a) Bilinearität:

$$\langle ru+u',v\rangle = r\cdot\langle u,v\rangle + \langle u',v\rangle$$
$$\langle u,rv+v'\rangle = r\cdot\langle u,v\rangle + \langle u,v'\rangle$$

Bsp: In $\mathbb{R}^2$: $\left\langle \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right\rangle = a_1\cdot 5 + a_2\cdot 3$ ist linear

(b) Symmetrie:

$$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$$

(c) Positive Definitheit:

Ist $v\neq 0$, so ist $\langle v,v\rangle > 0$

Ein euklidischer VR ist ein $\mathbb{R}$-VR mit einem Skalarprodukt.

Def 6.1.2: Sei V ein $\mathbb{C}$-VR. Ein (hermitesches) Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$, $(u,v)\longmapsto \langle u,v\rangle$, so dass für alle $u,u',v,v'\in V$ und $r\in\mathbb{C}$ folgendes gilt:

(a) Sesquilinearität:

$$\langle ru+u',v\rangle = r\cdot\langle u,v\rangle + \langle u',v\rangle$$
$$\langle u,rv+v'\rangle = \bar{r}\cdot\langle u,v\rangle + \langle u,v'\rangle$$

Bsp: $\left\langle \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right\rangle = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2$

(b) Hermitezität:

$$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$$

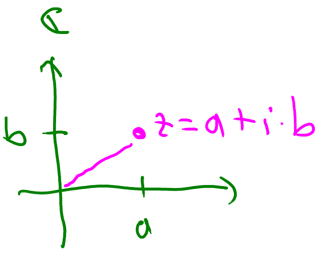
(c) Positive Definitheit:

Ist $v\neq 0$, so ist $\langle v,v\rangle$ eine reelle Zahl >0.

Ein unitärer VR ist ein $\mathbb{C}$-VR mit einem Skalarprodukt.

In $\mathbb{C}^1$:

$$\|z\| = \sqrt{\langle z,z\rangle} = \overbrace{\sqrt{\underbrace{z\cdot\bar{z}}_{|z|^2}}}^{|z|}$$



In $\mathbb{C}^2$:

$$\left\|\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{z_1\cdot\bar{z}_1 + z_2\cdot\bar{z}_2}$$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Def 6.1.3: Sei V ein euklidischer oder unitärer VR. Die Norm eines Vektors $v \in V$ ist $\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Bsp 6.1.4: Wir fassen $\mathbb{R}^n$ als euklidischen VR auf und $\mathbb{C}^n$ als unitären VR mit dem Standard-Skalarprodukt

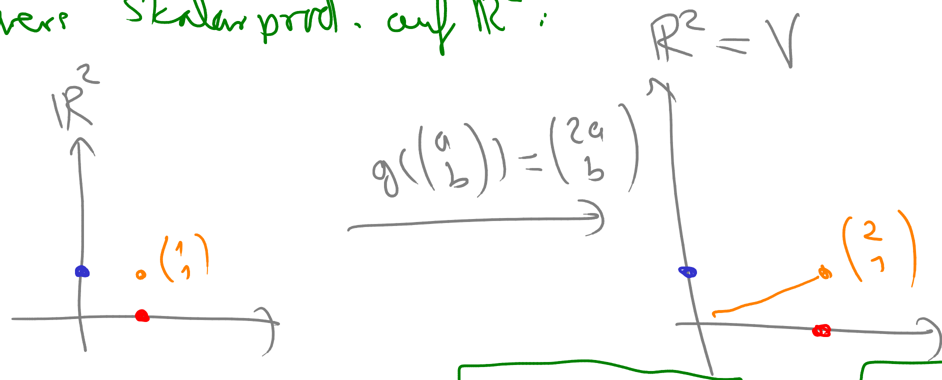
$$\Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{v}, \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{w} \Big\rangle = a_1 \underbrace{\overline{b_1}}_{\text{in } \mathbb{R}^n:\ \overline{b_i} = b_i} + \dots + a_n \overline{b_n} = v^T \cdot \overline{w}$$

alle Einträge von w komplex konjugieren.

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\underbrace{a_1 \overline{a_1}}_{\text{in } \mathbb{R}^n:\ a_1^2 \dots} + \dots + a_n \overline{a_n}} = \sqrt{\underbrace{|a_1|^2}_{a_1^2 = |a_1|^2} + \dots + |a_n|^2}$$

Um ein Skalarprodukt auf einem 3-dim $\mathbb{R}$-VR V zu finden:
Wähle einen Iso $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow V$
Erhalte daraus Skalarprodukt auf V: $\langle v,w\rangle := \langle g^{-1}(v), g^{-1}(w)\rangle$

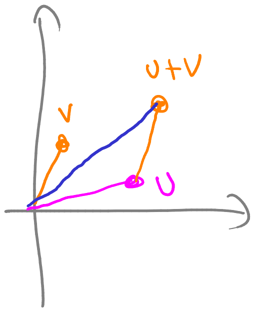
Bsp: Ein „anderes" Skalarprod. auf $\mathbb{R}^2$:



$$\left\|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\|_{anders} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{anders}} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}$$
$$= \sqrt{1\cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{2}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right\rangle_{anders} = \left\langle \begin{pmatrix}\frac12 a_1\\a_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac12 b_1\\b_2\end{pmatrix}\right\rangle = \frac14 a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Satz 6.1.5: Sei V ein euklidischer / unitärer $\mathbb{K}$-VR, seien $v,w \in V$ und sei $r \in \mathbb{K}$. Dann gilt:



(a) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(b) $\|r\cdot v\| = |r|\cdot\|v\|$

(c) $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$ (Cauchy-Schwarz)

Und: $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\cdot\|v\|$ g.d.w. u und v lin abh sind.

(d) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung)

Bew: (a) Falls $v \neq 0$: $\|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v,v\rangle}_{>0}} > 0$

Falls $v = 0$: $\|v\| = \sqrt{\langle 0,0\rangle} = 0$

NR: $\langle 0,w\rangle = \langle 1\cdot 0 + 0, w\rangle = 1\cdot\langle 0,w\rangle + \langle 0,w\rangle = 2\cdot\langle 0,w\rangle$

$\Rightarrow \langle 0,w\rangle = 0$

Analog: $\langle v,0\rangle = 0$

(b) $\|r\cdot v\| = \sqrt{\langle r\cdot v, r\cdot v\rangle}$

$= \sqrt{r\cdot\langle v, rv\rangle} = \sqrt{\underbrace{r\cdot\bar{r}}_{|r|^2}\cdot\langle v,v\rangle}$

$= \sqrt{|r|^2}\cdot\sqrt{\langle v,v\rangle} = |r|\cdot\|v\|$

(c) Falls $v = 0$: $|\langle u,v\rangle| = 0 = \|u\|\cdot\|v\|$

Also sei jetzt $v \neq 0$.

Setze $\alpha := \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$

$\bar{\alpha} = \dfrac{\overline{\langle u,v\rangle}}{\overline{\langle v,v\rangle}} = \dfrac{\langle v,u\rangle}{\langle v,v\rangle}$

$w := u - \alpha\cdot v$

$0 \leq \|w\|^2 = \langle w,w\rangle = \langle u-\alpha v, u-\alpha v\rangle$

(*) $\underbrace{\langle u, u-\alpha v\rangle}_{=\langle u,u\rangle - \bar{\alpha}\cdot\langle u,v\rangle} - \alpha\cdot\underbrace{\langle v, u-\alpha v\rangle}_{=\langle v,u\rangle - \bar{\alpha}\cdot\langle v,v\rangle}$

$= \langle u,u\rangle - \bar{\alpha}\cdot\langle u,v\rangle - \alpha\cdot\left(\langle v,u\rangle - \bar{\alpha}\cdot\langle v,v\rangle\right)$

$= \|u\|^2 - \dfrac{\langle v,u\rangle\cdot\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} - \dfrac{\langle u,v\rangle\cdot\langle v,u\rangle}{\|v\|^2} + \dfrac{\langle u,v\rangle\langle v,u\rangle\cancel{\|v\|^2}}{\|v\|^2\cdot\cancel{\|v\|^2}}$

$= \|u\|^2 - \dfrac{\langle u,v\rangle\,\overline{\langle u,v\rangle}}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \dfrac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2}$

$(*) \Rightarrow \|u\|^2 \geq \dfrac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2} \Rightarrow \|u\| \geq \dfrac{|\langle u,v\rangle|}{\|v\|}$

$\Rightarrow \|u\| \cdot \|v\| \geq |\langle u,v\rangle|$

Bleibt z.z.: Gleichheit gdw. u, v l.a.

- Falls $v = 0$: Beide Seiten $= 0$: ✓
- Sonst: Habe $\|u\| \cdot \|v\| = |\langle u,v\rangle|$ gdw $\|w\|^2 = 0$ gdw $w = 0$
  - $w = 0 \Rightarrow u = \alpha \cdot v \Rightarrow$ l.a.
  - Falls u, v l.a. und $v \neq 0$ habe $u = \beta \cdot v$ für ein $\beta \in \mathbb{K}$.

    $\alpha = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} = \dfrac{\langle \beta v,v\rangle}{\langle v,v\rangle} = \beta \cdot \dfrac{\langle v,v\rangle}{\langle v,v\rangle} = \beta$

    $\Rightarrow w = u - \alpha v = u - \beta v = 0 \Rightarrow$ Gleichheit $\square$

(d) Zeige: $\|u+v\|^2 \overset{?}{\leq} (\|u\| + \|v\|)^2$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle = \underbrace{\langle u,u\rangle}_{= \|u\|^2} + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \underbrace{\langle v,v\rangle}_{= \|v\|^2}$$

$$(\|u\| + \|v\|)^2 = \|u\|^2 + 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2$$

Obiges folgt also aus

$$\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle \overset{?}{\leq} 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\|$$

$$\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle = \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} \leq 2 \cdot |\langle u,v\rangle| \leq 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{(c)}$$

Nebenrechnung: $z = a + ib \in \mathbb{C}$ $\quad \bar{z} = a - ib$

$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a$ $\quad$ (a = Realteil von z)

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| \geq a$. Also $z + \bar{z} \leq 2 \cdot |z|$ $\square$

Def 6.1.6: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

(a) $\overline{A}$ sei die Matrix, die aus A entsteht, indem man alle Einträge komplex konjugiert.

(b) A heißt <u>symmetrisch</u>, wenn gilt: $A^T = A$

A heißt <u>hermitesch</u>, wenn gilt: $A^T = \overline{A}$

(c) Eine hermitesche Matrix A heißt <u>positiv definit</u>, wenn für alle $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$v^T A \overline{v}$ ist eine reelle Zahl > 0.

Bsp: Symmetrisch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & -1 \\ 4 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Bsp. hermitesch

$$\begin{pmatrix} 2 & 1-i & 3+i \\ 1+i & 5 & 4i \\ 3-i & -4i & 8 \end{pmatrix}$$

Satz 6.1.7 (a) Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit, so ist

$$\langle v, w \rangle := v^T A \overline{w}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$

(b) Jedes Skalarprod. auf $\mathbb{K}^n$ lässt sich in dieser Art schreiben.

Bew: (a) • Sesquilinearität:

$$\langle rv + v', w \rangle \overset{?}{=} r \cdot \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$$

$$\langle rv + v', w \rangle = (rv + v')^T A \overline{w} = (r \cdot v^T + (v')^T) A \overline{w} = r \cdot v^T A \overline{w} + (v')^T A \overline{w} = r \cdot \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$$

$$\langle v, rw + w' \rangle \overset{?}{=} \overline{r} \cdot \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$$

$$\langle v, rw + w' \rangle = v^T A (\overline{rw + w'}) = v^T A (\overline{r} \cdot \overline{w} + \overline{w'}) = \overline{r} \cdot v^T A \overline{w} + v^T A \overline{w'} = \overline{r} \cdot \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$$

• $\langle v, w \rangle \overset{?}{=} \overline{\langle w, v \rangle}$ da 1×1-Matrix

$$\langle v, w \rangle = v^T A \overline{w}, \qquad \overline{\langle w, v \rangle} = \overline{w^T A \overline{v}} = \overline{w}^T \overline{A} v = (\overline{w}^T \overline{A} v)^T$$

$$v^T \overline{A}^T (\overline{w}^T)^T$$

da A hermitesch $\rightarrow$ $\overline{A}^T = A$, $(\overline{w}^T)^T = \overline{w}$

$$= v^T A \overline{w}$$

- Positive Definitheit:

Sei $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

$\langle v, v \rangle = v^T A \overline{v}$. Das ist eine positive reelle Zahl, da A positiv definit.

(b) Sei $\langle v, w \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$.

$$v = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

std-Basis-Vektoren: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ etc

$$\left\langle \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n r_i e_i , \sum_{j=1}^n s_j \cdot e_j \right\rangle$$

$$\sum_{i=1}^n r_i \left\langle e_i , \sum_{j=1}^n s_j \cdot e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n r_i \sum_{j=1}^n \overline{s_j} \cdot \langle e_i, e_j \rangle \quad (*)$$

setze
$$A := \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & & & \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j}$$

Also: $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$

$$v^T A \overline{w} = (r_1, \ldots, r_n) \cdot A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{s_1} \\ \vdots \\ \overline{s_n} \end{pmatrix}}_{}$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle \cdot \overline{s_1} + \ldots + \langle e_1, e_n \rangle \overline{s_n} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= r_1 \cdot \left(\langle e_1, e_1 \rangle \cdot \overline{s_1} + \ldots + \langle e_1, e_n \rangle \overline{s_n} \right) + \ldots$$

$$+ r_n \cdot \left(\langle e_n, e_1 \rangle \overline{s_1} + \ldots + \langle e_n, e_n \rangle \overline{s_n} \right) = (*)$$

<u>Bleibt z.z:</u> A ist (i) hermitesch und (ii) positiv definit:

(i) <u>z.z:</u>

$$\begin{array}{ccc} a_{ji} & \overset{?}{=} & \overline{a_{ij}} \\ \| & & \| \\ \langle e_j, e_i \rangle & = & \overline{\langle e_i, e_j \rangle} \end{array}$$

(ii) Sei $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$: $v^T A \overline{v} = \langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ $\square$