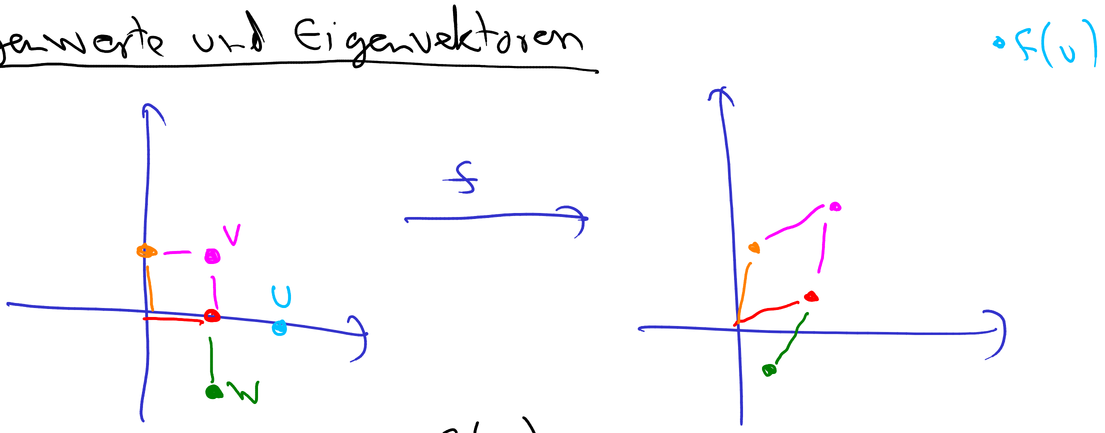
5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren



$$f(v) = 2 \cdot v$$
$$f(w) = \frac{1}{2} \cdot w$$

$$f(f(f(v))) = 8 \cdot v$$
$$f(f(f(w))) = \frac{1}{8} w$$

$$u = v + w$$
$$f(f(f(u))) = f(f(f(v))) + f(f(f(w)))$$
$$= 8v + \frac{1}{8} w$$

Def 5.2.1: Sei V ein K-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$.

(a) Ein $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f, wenn ein $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit $f(v) = \lambda \cdot v$.
v nennt man dann Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.

(b) f heißt diagonalisierbar, wenn V eine Basis $(v_i)_{i \in I}$ aus Eigenvektoren von f besitzt.
Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt diag'bar wenn die entsprechende Abb. diag'bar ist.

Also: (b) sagt: Habe Basis $(v_i)_{i \in I}$ und $\lambda_i \in K$ s.d.
$$f(v_i) = \lambda_i v_i$$
Also auch: $$f\Big(\sum_i r_i v_i\Big) = \sum_i r_i \lambda_i v_i$$

Def 5.2.2:
Eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ heißt Diagonalmatrix.

Satz 5.2.3: Eine Matrix ist diag'bar genau dann, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

Bew: • Sei A ~~ähnlich~~ ähnlich zu einer Diagonalmatrix,

d.h. $\underbrace{S^{-1}AS}_{A'}$ ist Diagonalmatrix für geeignetes S.

Setze $v_i := Se_i$ $\qquad A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$A'e_i = \lambda_i e_i$$

$$\|$$

$$S^{-1}A\underbrace{Se_i}_{v_i} \qquad \Longleftarrow \quad e_i = S^{-1}v_i$$

$$\| \qquad\qquad \lambda_i S^{-1}v_i = S^{-1}\lambda_i v_i$$

$$S^{-1}Av_i \qquad \Longrightarrow \quad Av_i = \lambda_i v_i$$

Also: A diagonalisierbar.

• Sei A diagbar, d.h. habe Basis $v_1, \dots, v_n$ und $\lambda_i \in K$ s.d. $Av_i = \lambda_i v_i$.

Wähle $S = \left(v_1 \middle| \cdots \middle| v_n \right)$, d.h. $Se_i = v_i$

$$S^{-1}ASe_i = S^{-1}Av_i = S^{-1}\lambda_i v_i = \lambda_i S^{-1}v_i = \lambda_i e_i$$

Also: i-te Spalte von $S^{-1}AS$ ist $\lambda_i e_i$.

Also insges. $\quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\qquad \square$

Bem 5.2.4: Ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte.

Bew: Ist $A' = S^{-1}AS$ und ist λ EW $:=$ Eigenwert von A mit zugehörigem EV $:=$ Eigenvektor v (also $Av = \lambda v$), dann ist $S^{-1}v$ ein EV zum EW λ von A':

$$A'S^{-1}v = S^{-1}ASS^{-1}v = S^{-1}Av = S^{-1}\lambda v = \lambda S^{-1}v \qquad \square$$

Bem 5.2.5: Ist $A = S^{-1} \cdot A' \cdot S$, mit $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, so gilt:

$$A^k = \underbrace{S^{-1} \cdot A' \cdot S \cdot S^{-1} \cdot A' \cdot S \cdot \quad \ldots \cdot \quad S^{-1} \cdot A' \cdot S}_{k\text{-mal}}$$

$$= S^{-1} \underbrace{A' \cdot A' \cdot \ldots \cdot A'}_{k\text{-mal}} \cdot S = S^{-1} (A')^k S$$

$$= S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot S. \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Außerdem $A^{-k} = (A^{-1})^k = ((S^{-1} A' S)^{-1})^k$

$$= (S^{-1} \cdot A'^{-1} \underbrace{(S^{-1})^{-1}}_{S})^k = (S^{-1} A'^{-1} S)^k$$

$$= S^{-1} (A')^{-k} S$$

Wie findet man die Eigenwerte einer Matrix und zugehörige Eigenvektoren?

λ ist ein EW von A $\iff$ $\underbrace{\text{ex. } v \in K^n \setminus \{0\} : \ Av = \lambda v}_{(*)}$

$$\lambda v = (\lambda I_n) v, \quad \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$Av - (\lambda \cdot I_n) v = 0$$

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot v$$

$$v \in \ker(A - \lambda \cdot I_n)$$

$(*) \iff \{0\} \subsetneq \ker(A - \lambda \cdot I_n)$

$\iff \operatorname{rk}(A - \lambda I_n) < n$

$\iff A - \lambda I_n$ nicht invertierbar

$\iff \det(A - \lambda I_n) = 0$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Ist 5 EW von A?

Prüfe dafür, ob

$A - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ invbar ist.

$$= \begin{pmatrix} 3-5 & 1 \\ 2 & 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Also ist 5 kein EW.

Allgemein: x ist EW von A

gdw $\underbrace{\det \begin{pmatrix} 3-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix}}_{} = 0$

$$(3-x) \cdot (2-x) - 2 = 6 - 5x + x^2 - 2 = x^2 - 5x + 4$$

Lösungen von „$x^2 - 5x + 4 = 0$": $\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$

Lsg sind also 4 und 1.

Die Eigenwerte von A sind also $\boxed{\underset{\lambda_2}{1} \text{ und } \underset{\lambda_1}{4}}$.

$\boxed{\text{Also: } A = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot S}$

- Eigenvektoren von A zum Eigenwert 4 sind genau die nicht-0-Vektoren, die von $\underbrace{A - 4 \cdot I_2}_{= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}$ auf 0 abgebildet werden;

also die nicht-triv. Lsg. vom LSG, das gegeben ist durch $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow$ EV $v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ (Beispiel) $\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Probe: $A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot v_1$

- EV von A zum EW 1: Betrachte $A - 1 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ EV $v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

- Setze $S = \left(v_1 \middle| v_2 \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = S \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$A^{100} = S \cdot \begin{pmatrix} 4^{100} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot S^{-1}$$

Def 5.2.6: (a) Das <u>charakteristische Polynom</u> einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist

$$\chi_A := \det(A - x \cdot I_n) \in K[x]$$

(Aus 5.1.5 folgt, dass χ_A in der Tat ein Polynom ist.)

(b) Ist V ein endl-dim K-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$, so definiere das <u>charakteristische Polynom</u> χ_f von f wie folgt:

- Wähle einen Iso $g: K^n \to V$
- Sei A die Matrix zu $g^{-1} \circ f \circ g : K^n \to K^n$
- $\chi_f := \chi_A$

Bem: χ_f ist unabh. von der Wahl von g. Dazu zu prüfen (wie bei 5.1.12):
Ähnliche Matrizen haben das gleiche char. Poly:

$$\chi_A \overset{?}{=} \chi_{S^{-1}AS} \qquad S^{-1}\cdot(x\cdot I_n)\cdot S$$

$$\det(A - x\cdot I_n) \qquad \det(S^{-1}AS - \underbrace{x\cdot I_n}_{=S^{-1}\cdot(x\cdot I_n)\cdot S})$$

$$= \det(S^{-1}(A - x\cdot I_n)\cdot S)$$

Satz 5.2.7: Sei V ein endl.-dim VR und $f \in End(V)$. Dann gilt für $\lambda \in K$:
λ ist EW von f g.d.w. $\chi_f(\lambda) = 0$

Bew: Siehe oben. $\square$

Bem 5.2.8: Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ hat die Form $\chi_A(x) = a_n\cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
mit $a_n = (-1)^n$ und $\underbrace{a_0 = \det A}$

Bew: Mit 5.1.5

$\det A = \det(A - 0\cdot I_n) = \chi_A(0) = a_0$