5 Endomorphismen

Sei K ein Körper

Def. 5.0.1: Sei V ein K-VR. Elemente von $\mathrm{Hom}(V,V)$ nennt man Endomorphismen von V. Man setzt $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V,V)$.

5.1 Determinanten

Satz 5.1.1: Es existiert genau eine Abb. $f: K^{n\times n} \to K$ (muss nicht linear sein!) mit den folgenden Eigenschaften:

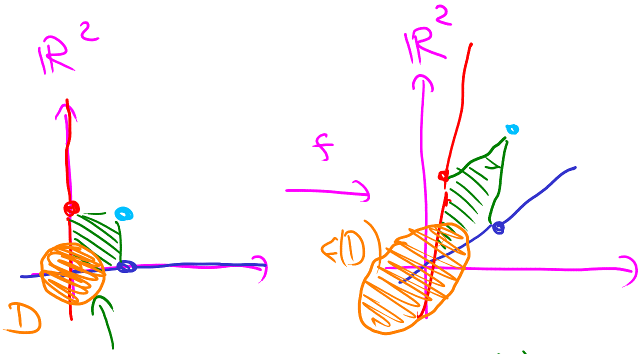
(a) f ist alternierend, hat $A \in K^{n\times n}$ zwei gleiche Spalten, so ist $f(A)=0$

(b) f ist multilinear, d.h. für jedes $j \leq n$ und alle $v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n \in K^n$ ist die Abb

$$K^n \to K,\ w \mapsto f\left(\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & \underset{\uparrow}{w} & & v_n \end{array}\right)\right) \quad \text{linear}$$

j-te Spalte

(c) f ist normiert, d.h. $f(I_n)=1$



Q
$\shortparallel$
Einheitsquadrat

$\text{Fläche}(f(Q)) = \det f$
$\shortparallel$
$\det f \cdot \text{Fläche}(Q)$

$\text{Fläche}(f(D)) = \det f \cdot \text{Fläche}(D)$

Bsp zu alternierend:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Def 5.1.2: Diese Abb f schreibt man $\det$; $\det(A)$ ist die Determinante von A

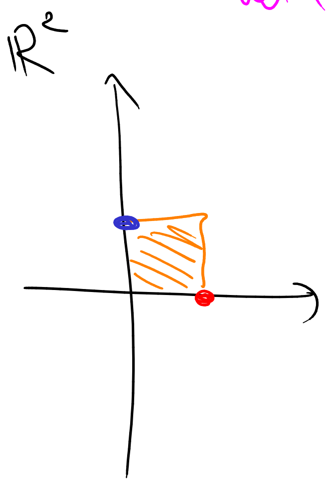
Multilinearität:

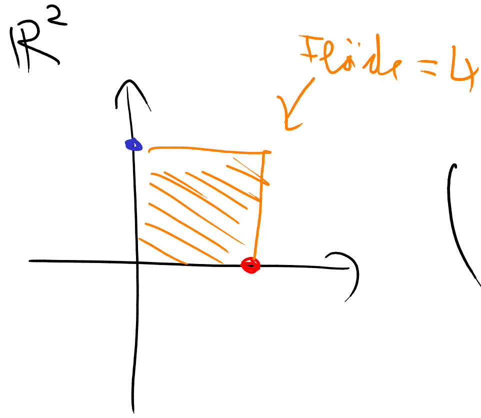
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & 10 & 6 \\ 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 2 \cdot \det(A)$$

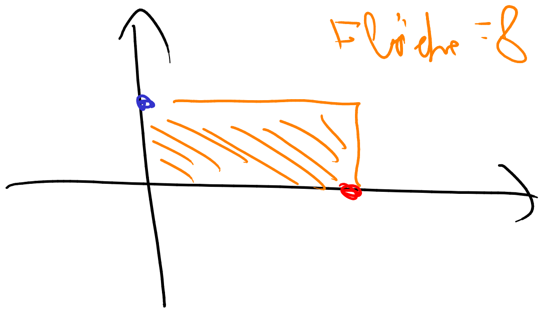
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4+1 & 7 \\ 2 & 5+1 & 6 \\ 3 & 6+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(C) = \det(A) + \det(A')$





$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lemma 5.1.3: Seien $A, A' \in K^{n \times n}$

(a) Wenn man A' aus A erhält durch tauschen von zwei Spalten, dann gilt, $\det(A') = -\det(A)$.

(b) Wenn man A' aus A erhält durch Multiplikation einer Spalte mit $r \in K$, so gilt $\det(A') = r \cdot \det(A)$

(c) Wenn man A' aus A erhält, indem man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte addiert, gilt $\det(A') = \det(A)$.

(d) Enthält A eine Spalte, die komplett 0 ist, so ist $\det A = 0$

Bew: (b): Mult. Linearität ✓

(d): Wende (b) an: Multiplizieren der 0-Spalte mit 0 ergibt

$$\det(A) = 0 \cdot \det(A) = 0$$

(a)
$$\underbrace{\det \begin{pmatrix} \cdots & v & \cdots & w & \cdots \end{pmatrix}}_{(|v||w|)} \overset{?}{=} -\underbrace{\det \begin{pmatrix} \cdots & w & \cdots & v & \cdots \end{pmatrix}}_{(|w||v|)}$$

Kurzschreibweise:

$$\det(|v||v|) = 0 \qquad \det((v||w)) + \underbrace{\det((v||v))}_{=0} = \det(|v||v+w|)$$

$$\det(|v||w|) = \det(|v||v+w|) - \underbrace{\det(|v+w||v+w|)}_{=0}$$

$$= \det(|\underbrace{v-(v+w)}_{-w}||v+w|) + \underbrace{\det(|-w||-w|)}_{=0}$$

$$= \det(|-w||v+w+(-w)|) = \det(|-w||v|)$$

$$= -\det(|w||v|) \quad \square$$

(c) Notation wie im Bew von (a):

$$\det(|v||w|) \overset{?}{=} \det(|v||w+rv|)$$

$$\underbrace{r\cdot\det(|v||v|)}_{=0} = \det(|v||r\cdot v|)$$

$$\det(|v||w+rv|) = \det(|v||w|) + \underbrace{\det(|v||rv|)}_{=0} \quad \square$$

Mit diesem Lemma kann man Determinanten ausrechnen:

(*) Zu einer Matrix A wende Gauß-Elim an auf A^T. Erhalte

$$E_k' \cdots E_1' A^T = B' \text{ in Normalform}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(B')^T}_{=B} = (E_k' \cdots E_1' A^T)^T = A(E_1')^T \cdots (E_k')^T$$

$$E_i := ((E_i')^T)^{-1}$$

$$A = B \cdot E_k \cdots E_1$$

$$\det B = \begin{cases} 1 & \text{falls } B = I_n \\ 0 & \text{falls } B \text{ enthält 0-Spalte} \end{cases}$$

Lemma 5.1.3 sagt, wie man $\det(B \cdot E_k)$ aus $\det(B)$ erhält, etc:

$$\det B \rightsquigarrow \det(BE_k) \rightsquigarrow \det(BE_k \cdot E_{k-1}) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \det A.$$

Habe also schon die Eindeutigkeit in 5.1.1 gezeigt.

Satz 5.1.4: Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt:

(a) $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

(b) A ist invertierbar gdw $\det A \neq 0$. Ist dies der Fall, so gilt $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

(c) $\det A = \det A^T$. Insbes. gilt 5.1.3 auch für Zeilen statt Spalten.

Bew: (b), erste Hälfte:

Not'n wie oben bei (*): $A = B \cdot E_k \cdots E_1$, B Transponierter von Normalform $\quad \det A = 0 \iff \det B = 0 \iff B$ hat eine 0-Spalte

$\iff B$ nicht inv'bar $\iff A$ nicht invbar.

(a) $A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transponierte} \\ \text{Normalform}}}{C} \cdot \underbrace{E_k \cdots E_1}_{\text{Elementar-Matrizen}}$ $\qquad B = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transponierte} \\ \text{Normalform}}}{D} \cdot \underbrace{F_l \cdots F_1}_{\text{Elementar-Matrizen}}$

Falls D eine 0-Spalte enthält: $\det B = 0 \Rightarrow B$ nicht inv'bar

$\Rightarrow A \cdot B$ nicht invbar $\Rightarrow \det(AB) = 0$

Also $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$

Falls D keine 0-Spalte enthält, ist $D = I_n$

$A \cdot B = C \cdot E_k \cdots E_1 \cdot \cancel{D} \cdot F_l \cdots F_1$

Bem: Ist E eine Elementarmatrix, so ist $\det E =$ dem entsprechenden Faktor aus Lemma 5.1.3, da $\quad E = \underbrace{I_n \cdot E}_{\substack{\text{Spaltentransformation auf} \\ \text{Einheitsmatrix angewandt.}}}$

Damit habe: $\det A = \det C \cdot \det E_k \cdots \det E_1$

$\det B = \underbrace{\det D}_{=1} \cdot \det F_l \cdots \det F_1$

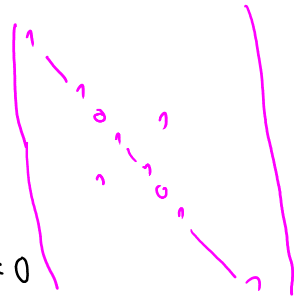
$\det(AB) = \det C \cdot \det E_k \cdots \det E_1 \cdot \det F_l \cdots \det F_1$

$= \det A \cdot \det B$

Rest von (b): $\det A \cdot \det A^{-1} \overset{(a)}{=} \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$

(c) • Ist E eine Elementarmatrix, so gilt $\det E = \det E^T$

(Wenn E Spalten tauscht oder eine Spalte mit r multipliziert, gilt $E = E^T$; wenn E das Viel-Fache einer Spalte zu einer anderen addiert, tut E^T das auch; dann ist $\det E^T = \det E = 1$)



- $\det A \neq 0 \iff A$ inv'bar $\iff A^T$ inv'bar $\iff \det A^T \neq 0$
- Sei jetzt also A inv'bar.

schreibe $A = \underbrace{E_1 \cdots E_k}_{\text{el.-Matr.}}$. $\det(A) = \det(E_1)\cdots\det(E_k)$

$$\det(A^T) = \det(E_k^T \cdots E_1^T) = \det(E_k^T)\cdots\det(E_1^T)$$

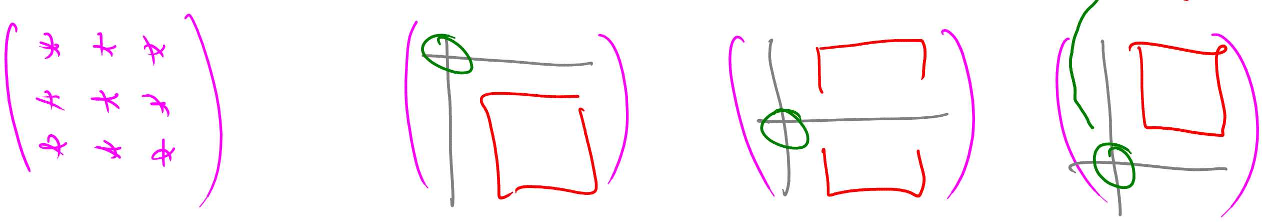
□

Satz 5.1.5 (Laplacescher Entwicklungssatz): Sei $A \in K^{n\times n}$ für $n \geq 2$

$$A_{(k,l)} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{k-1,1} & & & & & & \\ a_{k,1} & & & a_{k,l} & & & a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & a_{n,l} & & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(a) Für jedes l gilt: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l}\, a_{k,l} \cdot \det(A_{(k,l)})$

(b) Für jedes k gilt: $\det A = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l}\, a_{k,l} \cdot \det(A_{(k,l)})$



$l=1$ $\quad k=1$ $\quad k=2$ $\quad k=3$

$l+k=2 \leadsto +$ $\quad l+k=3 \leadsto -$ $\quad l+k=4 \leadsto +$

Bew von 5.1.5 und von der Existenz in 5.1.1:

Mache Induktion über n:

- Ind-Anfang: $n=1$: Für $A \in K^{1\times 1}$ erfüllt $\det A = A$ alle Eigenschaften.
- Ind. Schritt:
  - Nehme an, dass 5.1.1 wahr ist für $n-1$
  - Zeige: • Wenn wir die Determinante von $n\times n$-Matrizen mit 5.1.5 (b) definieren (für ein beliebiges fester k), so erfüllt diese Determinante die Eigenschaften von 5.1.1.

  Dann ist 5.1.1. fertig bewiesen, und auch 5.1.5 (b)
  - 5.1.5 (a) folgt dann aus 5.1.4 (c)

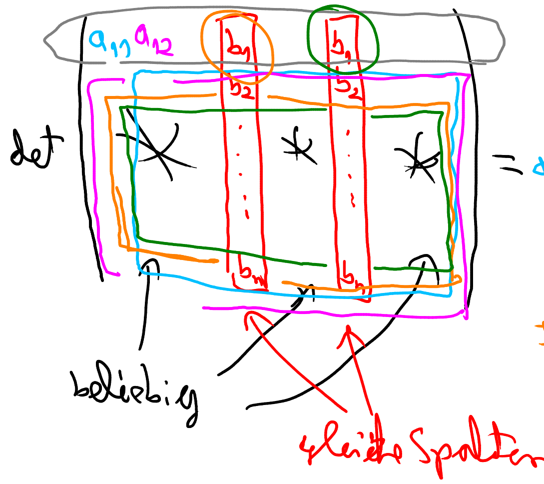
Sei also k fest und $\det A$ (für $A \in K^{n\times n}$) definiert durch

$$\det A = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{k+\ell}\, a_{k\ell} \cdot \det\left(A_{(k,\ell)}\right)$$

- z.z.: (a), (b), (c) von 5.1.1.
- Der Einfachheit halber nehme $k=1$ an, d.h. entwickle nach der ersten Zeile.
- (c)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\det I_{n-1}}_{=1} + 0 \cdot \ldots = 1$$

- (a)



$$= a_{11} \cdot \underbrace{\det [\,||\,]}_{=0} - a_{12} \cdot \underbrace{\det [\,||\,]}_{=0} + \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \pm b_1 \cdot \det \square + \ldots \\ \pm b_1 \cdot \det \square + \ldots \end{array}\right\} (*)$$

$\square$ und $\square$ haben die selben Spalten aber in anderen

Reihenfolge. D.h.: $\det \square = \pm \det \square$

Die Vorzeichen kommen so raus, dass sich in (*) das weghebt.

- (b) Zeige: Jeder einzelne Summand der Entwicklung ist multilinear. Benutze, dass det von $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen multilinear ist.

$\square$

Korollar 5.1.6: (a)
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

(b) Regel von Sarrus (nur für 3x3-Matrizen; nicht für größere!):

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}}^{\text{hingedacht}}$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$
$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Korollar 5.1.7:
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & * & & * \\ 0 & a_{22} & & \\ | & & \ddots & * \\ 0 & — & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$$

Bew.: Entwickle nach 1. Spalte: Erhalte: $\det = a_{11}\cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Wiederhole.

$\square$

Def. 5.1.8: Zwei Matrizen $A, A' \in K^{n\times n}$ heißen ähnlich, wenn eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$ existiert, so dass $A' = S^{-1}AS$ gilt.

Bsp.: $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} = S^{-1}$ Dann erhalte A' aus A durch tauschen der ersten beiden Zeilen und der ersten beiden Spalten.

Satz 5.1.10: Ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante.

Bew:

$$\det(S^{-1}AS) \overset{?}{=} \det A$$

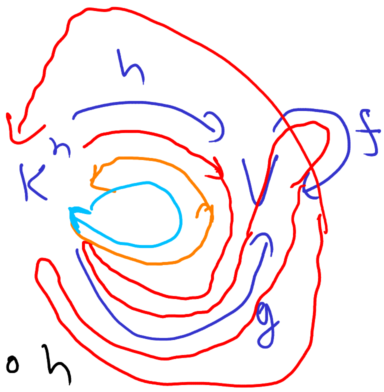
$$\underbrace{\det(S^{-1})}_{=\frac{1}{\det S}} \cdot \det A \cdot \det S = \det A. \qquad \square$$

Def 5.1.11: Ist V ein endl.-dim K-VR und $f \in End(V)$, so definieren wir $\det f$ wie folgt:

- Wähle einen Isomorphismus $g: K^n \longrightarrow V$ ($n = \dim V$; g existiert nach Bsp. 4.2.4)
- Sei A die Matrix zu $g^{-1} \circ f \circ g : K^n \longrightarrow K^n$
- Setze $\det f := \det A$.

Satz 5.1.12: In Def. 5.1.11 hängt $\det f$ nicht von der Wahl von g ab.

Bew: Seien $g, h: K^n \longrightarrow V$ Isomorphismen.



Sei A die Matrix zu $g^{-1} \circ f \circ g$

sei B die Matrix zu $h^{-1} \circ f \circ h$.

zu zeigen: $\det B = \det A$.

Bew: $B = h^{-1} \circ f \circ h = \underbrace{h^{-1} \circ g}_{S^{-1}} \circ \underbrace{g^{-1} \circ f \circ g}_{A} \circ \underbrace{g^{-1} \circ h}_{S}$

Also: B ähnlich zu A $\Rightarrow$ $\det B = \det A$. $\square$