Nachträgliche Änderungen sind mit einem gelben Balken markiert.

4.3 Anwendungen auf LGS

K Kp.

Satz 4.3.1: Ist $(A \mid \underline{b})$ die Kooff-Matrix eines LGS $\underline{L}$ ($A \in K^{m\times n}$, $\underline{b} \in K^m$) und ist $(A' \mid \underline{b}')$ die Kooff-Matrix einer elementaren Transformation $\underline{L}'$ von $\underline{L}$, so existiert ein $E \in K^{m\times m}$, so dass gilt: $A' = EA$, $\underline{b}' = E\cdot\underline{b}$. E hat folgende Form:

(a) Gleichungen k und l tauschen ($1 \leq k < l \leq m$).

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ k & l \end{array}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

- Falls $i \neq k,l$: $Ee_i = e_i$
- $Ee_k = e_l$, $Ee_l = e_k$
- Also: E tauscht den k-ten und l-ten Eintrag eines Vektors.
- Also: EAx geht aus Ax hervor durch tauschen der k-ten und l-ten Zeile, und entsprechend $E\underline{b}$.

(b) Gleichung k mit $r \in K^\times$ multiplizieren ($1 \leq k \leq m$):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & r & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{array}{c} \uparrow \\ k \end{array}$$

(c) Das r-Fache von Gleichung k zur Gleichung l addieren ($r \in K$, $1 \leq k,l \leq m$, $k \neq l$):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & r & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow l$$
$$\begin{array}{c} \uparrow \\ k \end{array}$$

$$E\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l + r\cdot b_k \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

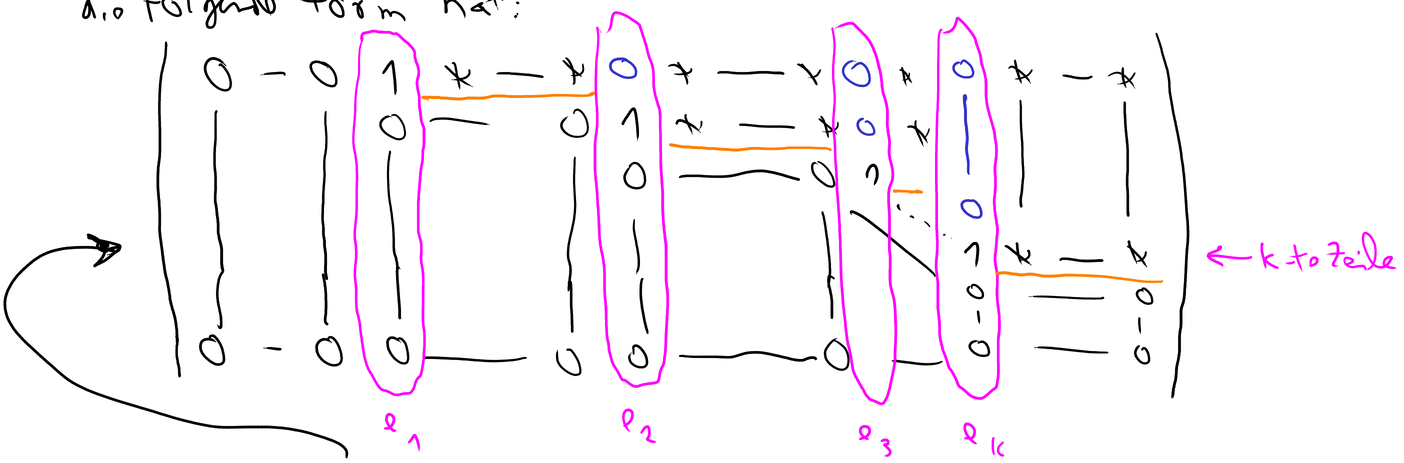
Bem: E erhält man, indem man die entsprechende el. Transformation auf I_n anwendet: el. Transfo. auf I_n anwenden ergibt: $E\cdot I_n = E$

Def. 4.3.2: Die obigen Matrizen E nennt man Elementarmatrizen.

Satz 4.3.3: Elementarmatrizen sind invertierbar, und die Inversen sind wieder

Elementarmatrizen. (Nach 1.1.8)

<u>Satz 4.3.4 (Gauß-Algorithmus; vgl. Satz 1.1.11)</u>: Zu jeder Matrix $A \in K^{m \times n}$ existieren Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_k \in K^{m \times m}$, so dass $E_k \cdots E_1 A$ die folgende Form hat:



<u>Def 4.3.5:</u> Matrizen dieser Form nennt man in <u>Normalform</u>.

<u>Bew 4.3.4:</u> Wende erst 1.1.11 an. Bleibt noch, die Einträge über den Pivot-Elementen zu 0 zu machen.

Fange rechts an: Addiere geeignete Vielfache der k-Zeile zu den Zeilen 1 bis $k-1$, um 0en über dem k-ten Pivot-Element zu erhalten.

Wiederhole für die restl. Pivot-Elemente (von rechts nach links). □

<u>Satz 4.3.6:</u> Der Rang einer Matrix A in der obigen Normalform ist gleich k. (= Anzahl der Zeilen, die nicht komplett 0 sind.)

<u>Bew:</u> $\operatorname{im} A$ enthält $e_1, \dots, e_k$ (da das Spalten von A sind).

Also $\operatorname{im} A \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b_1, \dots, b_k \in K \right\} =: U$

Da alle Spalten von A in U liegen, ist $\operatorname{im} A = U$.

Also $\operatorname{rk} A = \dim U = k$. □

<u>Satz 4.3.7:</u> Ist $A \in K^{n \times n}$, so kann wie folgt bestimmt werden, ob A invertierbar ist und was ggf A^{-1} ist:

Wende auf $\left(A \mid I_n \right)$ Zeilentransformationen an, so dass die linke Hälfte in Normalform kommt:

Also: Erhalte $(\underbrace{A'}_{\text{in Normalform}} \mid B')$

- A ist inv-bar g.d.w. $A' = I_n$
- Ist dies der Fall, so ist $B' = A^{-1}$.

Bew: • Falls A' 0-Zeilen hat, ist $\operatorname{rk} A' < n$
$\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A$, also ist A nicht invertierbar.

• Falls A' keine 0-Zeilen hat, habe n Pivot-Elemente, d.h. in jeder Spalte ist ein Pivot-Element, also

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & 0 \\ & \boxed{1} & \\ 0 & & \boxed{1} \end{pmatrix} = I_n$$

Pivot-Elemente

Habe $A' = \underbrace{E_k \cdots E_1}_{C} A$ für Elementarmatrizen E_i

Habe auch $B' = C \cdot I_n$. Also $C = B'$

Habe also $I_n = A' = C \cdot A = B' \cdot A$. Daraus folgt $B' = A^{-1}$, da:

Lemma 4.3.8: Sind $A, B \in K^{n \times n}$ mit $A \cdot B = I_n$, so ist $B = A^{-1}$, $A = B^{-1}$.

Bew: $\operatorname{rk}(A \cdot B) \leq \operatorname{rk}(A) \Rightarrow \operatorname{rk} A = n \Rightarrow A$ inv'bar.
$\operatorname{rk}(A \cdot B) = \operatorname{rk}(I_n) = n$

$$B \overset{?}{=} A^{-1}$$
$$B = I_n \cdot B = A^{-1} A B = A^{-1} \cdot I_n = A^{-1}$$

□

Def 4.3.9: Die Transponierte einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$

ist $A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{n \times m}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Satz 4.3.10: (a) $(A^T)^T = A$ für $A \in K^{m\times n}$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$ für $A, B \in K^{m\times n}$

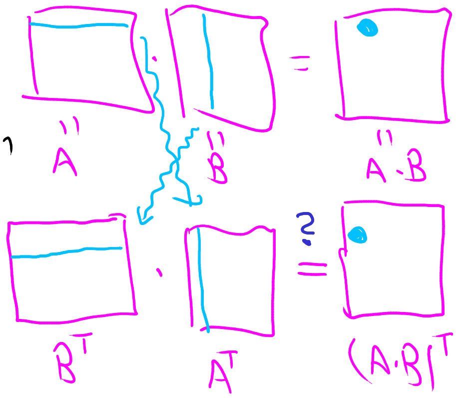
(c) $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ für $A \in K^{l\times m}$, $B \in K^{m\times n}$

(d) Für $A \in K^{n\times n}$ gilt:

A inv'bar $\iff$ A^T invbar

Ist dies der Fall, so ist $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

(e) Ist E eine Elementarmatrix, so ist auch E^T eine Elementarmatrix.



Bew: (a), (b): klar

(c) siehe rosa

(d) z.z.: $(A^{-1})^T \cdot A^T \overset{?}{=} I_n$

$$(A^{-1})^T \cdot A^T \overset{(c)}{=} (A \cdot A^{-1})^T = I_n^T = I_n$$

(e) Prüfe für jede Elementarmatrix einzeln.

Def 4.3.11: Ist $A \in K^{m\times n}$ und $E \in K^{m\times m}$ eine Elementarmatrix, so nennt man EA eine <u>Zeilentransformation</u> von A.

Ist $A \in K^{m\times n}$ und $E \in K^{n\times n}$ eine Elementarmatrix, so nennt man AE eine <u>Spaltentransformation</u> von A.

In der Tat: $A' := A^T$, $E' := E^T$

Dann $E'A'$ ist Zeilentransf. von A'

$AE = (E'A')^T$

Def 4.3.12: Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in K^{m\times n}$, seien $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ die Spalten von A

und seien $w_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ die Zeilen von A.

Der <u>Spaltenrang</u> von A ist $\dim \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$

Der <u>Zeilenrang</u> von A ist $\dim \langle w_1, \dots, w_m \rangle_K$.

Satz 4.3.13: Für jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ gilt Zeilenrang $\overset{(b)}{=}$ Spaltenrang $\overset{(a)}{=}$ rk A.

Insbesondere gilt für das LGS $A\underline{x} = 0$:

dim des Lösungsraums $\overset{(c)}{=}$ Anzahl der in Satz 1.1.12 frei wählbaren Variablen $\overset{(d)}{=}$ Anzahl der Variablen minus Zeilenrang.

Bew: (a) $\operatorname{im} A = \langle \underbrace{Ae_1}_{v_1}, \dots, \underbrace{Ae_n}_{v_n} \rangle_K \Rightarrow$ Spaltenrang $= \dim(\operatorname{im} A) = \operatorname{rk} A$

(b) Wähle S, T wie in 4.2.17, also $SAT = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big\}\operatorname{rk} A$ $= A'$

$A' = (A')^T = (SAT)^T = T^T A^T S^T$

Erhalte also: $\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A$

Zeilenrang von A = Spaltenrang von $A^T = \operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A$.

(c) Sei A'' in Normalform das Ergebnis von Gauß-Elim.

Anzahl der frei wählbaren Var. = Anzahl Spalten in A'' ohne Pivot-Elem

$= n - (\text{Anzahl Zeilen} \neq 0) = n - \operatorname{rk} A$

$= \dim \ker A = \dim$ Lösungsraum.

$A: K^n \to K^m$

(d) $\qquad$ $n -$ Zeilenrang

$\square$