4.2 Lineare Abbildungen

K Körper.

Def 4.2.1: Seien V, W K-VR

(a) Eine Abb. $f: V \to W$ heißt <u>lineare Abbildung</u> (auch: (<u>Vektorraum-)Homomorphismus</u>), wenn für $v, v' \in V$ und $r \in K$ gilt: $f(rv + v') = r f(v) + f(v')$

Die Menge aller lin. Abb. von V nach W wird mit $\mathrm{Hom}(V,W)$ bezeichnet.

(b) Eine bijektive lineare Abbildung nennt man einen <u>(Vektorraum-)Isomorphismus</u>.

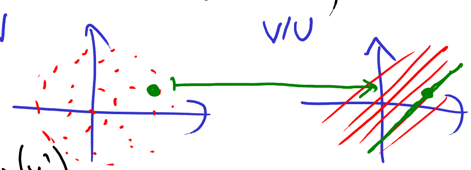
(c) K-Vektorräume V und W heißen <u>isomorph</u>, wenn ein Isomorphismus $f: V \to W$ existiert.

Bsp 4.2.2: Die zu einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ gehörende Abb. $K^n \to K^m$ ist linear. $A \in K^{n \times n}$ ist invertierbar genau dann, wenn die entsprechende Abb. $K^n \to K^n$ ein Isomorphismus ist.

Bsp. 4.2.3: Ist V ein K-VR und $U \subseteq V$ ein UVR, so sind die folgenden Abb. lineare Abb.:

(a) $\mathrm{inkl}: U \to V, u \mapsto u$ (Inklusionsabb.)

(b) $\mathrm{kan}: V \to V/U$



Bew (b): $\mathrm{kan}(r \cdot v + v') \overset{?}{=} r \cdot \mathrm{kan}(v) + \mathrm{kan}(v')$

$$\mathrm{kan}(r \cdot v + v') = \mathrm{kan}(rv) + \mathrm{kan}(v') = r \cdot \mathrm{kan}(v) + \mathrm{kan}(v')$$

$\square$

Bsp 4.2.4: Ist V ein K-VR und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so ist

$$f: K^n \to V, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n$$

ein Isomorphismus.

Bew: Nach 3.4.3(d) ist die Abb. eine Bijektion. Prüfe noch Linearität, d.h.:

$$f(r \cdot \underline{a} + \underline{a}') \overset{?}{=} r \cdot f(\underline{a}) + f(\underline{a}') \qquad \underline{a} = (a_i)_i, \ \underline{a}' = (a'_i)_i$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\sum_i (r a_i + a_i') v_i = r \cdot \sum_i a_i v_i + \sum_i a_i' v_i \qquad \square$$

Bem 4.2.5: Sind V, W K-VR, so ist $\mathrm{Hom}(V,W)$ auch ein K-VR mit punktweiser Vektoraddition und punktweiser Skalarmult.:

Für $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $r \in K$ setze

$$f+g : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto f(v) + g(v)$$

$$r \cdot f : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto r \cdot f(v)$$

Bew: Prüfe: (i) $f+g$ ist linear.

(ii) $r \cdot f$ ist linear.

(iii) $\mathrm{Hom}(V,W)$ erfüllt die VR-Axiome.

(i) Setze $h := f+g$.

$$h(r \cdot v + v') \overset{?}{=} r \cdot h(v) + h(v')$$

$$h(r\cdot v + v') = f(r \cdot v + v') + g(r \cdot v + v')$$

$$r \cdot h(v) + h(v') = r \cdot (f(v) + g(v)) + f(v') + g(v') = \underbrace{r \cdot f(v) + f(v')}_{\text{da } f \text{ linear}} + \underbrace{r \cdot g(v) + g(v')}_{\text{da } g \text{ linear}}$$

(ii) Analog.

(iii) Folgt aus den VR-Axiomen für W:

Bsp: $(r \cdot s) \cdot f \overset{?}{=} r \cdot (s \cdot f)$ $\qquad r, s \in K,\ f \in \mathrm{Hom}(V,W)$

zu prüfen: Für alle $v \in V$ gilt:

$$\big((r \cdot s) \cdot f\big)(v) \overset{?}{=} \big(r \cdot (s \cdot f)\big)(v)$$

$$\big((r \cdot s) \cdot f\big)(v) = (r \cdot s) \cdot f(v) = r \cdot (s \cdot f(v)) = r \cdot \big((s \cdot f)(v)\big) = \big(r \cdot (s \cdot f)\big)(v)$$

Andere VR-Axiome entsprechend. $\square$

Satz 4.2.6: Sind V und W K-VR, $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, $(w_i)_{i \in I} \in W^I$ beliebig, so existiert genau eine lin. Abb. $f : V \to W$ mit

$f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Bew: • Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$, so gilt:

Für eine Linear-Komb. $v = \sum_i r_i v_i$ ($r_i \in K$, fast alle $= 0$) ist

$$f(v) = f\left(\sum_i r_i v_i\right) = \sum_i f(r_i v_i) = \sum_i r_i f(v_i)$$

Da jedes $v \in V$ eine Lin-Komb. der Basisvektoren ist, ist f eindeutig bestimmt.

• zu gegebenen $(v_i)_i$, $(w_i)_i$ definiere $f: V \longrightarrow W$ durch

$$f\left(\underbrace{\sum_i r_i v_i}\right) := \sum_i r_i \cdot w_i \qquad (r_i \in K, \text{ fast alle } = 0)$$

Da sich jedes $v \in V$ eindeutig so schreiben lässt, ist f wohl definiert.

Bleibt z.z.: f ist linear:

$$f(rv + v') \overset{?}{=} r \cdot f(v) + f(v') \qquad v := \sum_i r_i v_i$$

$$f\left(r \cdot \sum r_i v_i + \sum r_i' v_i\right) = f\left(\sum (r \cdot r_i + r_i') \cdot v_i\right) = \sum (r \cdot r_i + r_i') \cdot w_i$$

$$r \cdot f\left(\sum r_i v_i\right) + f\left(\sum r_i' v_i\right) = r \cdot \sum r_i w_i + \sum r_i' w_i \qquad v' := \sum_i r_i' v_i$$

$\square$

Satz 4.2.7: „$\mathrm{Hom}(K^n, K^m) = K^{m \times n}$":

Die Abb. $K^{m \times n} \longrightarrow \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, die jeder Matrix die zugehörige lin. Abb. zuordnet, ist ein Isomorphismus.

Bew: • Linearität: Satz 4.1.5

• Injektiv: klar

• Surjektiv: Sei $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \in K^n$

Betrachte die Matrix

$$(a_{ij})_{ij} = A := \left(f(e_1) \,\middle|\, f(e_2) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, f(e_n) \right)$$

Beh: $Av = f(v)$ für alle $v \in K^n$

Prüfe zuerst: $Ae_k \overset{?}{=} f(e_k)$ $(1 \leq k \leq n)$

$$Ae_k = \left(\begin{array}{c} a_{11}\cdot 0 + \ldots \boxed{+ a_{1k}\cdot 1} + \ldots + a_{1n}\cdot 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot 0 + \ldots \boxed{a_{mk}\cdot 1} + \ldots + a_{mn}\cdot 0 \end{array} \right)$$

k-te Spalte von A $= f(e_k)$

Da nach Satz 4.2.6 nur eine lin. Abb. existiert, die e_i auf $f(e_i)$ abbildet für alle i, müssen die lin. Abb. f und A gleich sein. $\square$

Satz 4.2.8: Seien U, V, W K-VR und $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

Dann:

(a) $g \circ f : U \longrightarrow W$ ist linear

(b) Ist f ein Isomorphismus, so ist auch f^{-1} ein Isomorphismus.

Bew: (a) Übung.

(b) Geg: $v, v' \in V$, $r \in K$. z.z.: $f^{-1}(rv+v') \overset{?}{=} r\cdot f^{-1}(v) + f^{-1}(v')$

$\Updownarrow$ ← da f injektiv

$$f(f^{-1}(rv+v')) \overset{?}{=} f(r\cdot f^{-1}(v) + f^{-1}(v'))$$

$$\begin{array}{ccc} \shortparallel & & \shortparallel \\ rv+v' & = & r\cdot f(f^{-1}(v)) + f(f^{-1}(v')) \end{array}$$

$\square$

Rest vom Beweis von 4.1.7: War noch zu zeigen:

Ist die Abb. $A: K^n \longrightarrow K^n$ bijektiv, so ist die Matrix A invbar.

Nach 4.2.8 (b) ist die Umkehrabb g von $A: K^n \longrightarrow K^n$ linear.

Nach 4.2.7. ex. ein $B \in K^{n\times n}$, die g beschreibt.

Dieses B ist das Inverse von A, da:

Die Abb. $A\cdot B : K^n \longrightarrow K^n$ ist die Identität, also $A\cdot B = I_n$

Analog: $B\cdot A = I_n$ $\square$

Bem 4.2.9: Seien V und W K-VR, sei $f: V \to W$ ein Isomorphismus und $(v_i)_i \in V^I$. Dann gilt:

(a) $(v_i)_i$ ist l.u. $\iff$ $(f(v_i))_i$ ist l.u.

(b) $(v_i)_i$ erzeugen V $\iff$ $(f(v_i))_i$ erzeugen W

(c) $(v_i)_i$ ist Basis von V $\iff$ $(f(v_i))_i$ ist Basis von W

Insbes. $\dim V = \dim W$.

Bew: (a) „$\Leftarrow$": Zeige: Ist $(v_i)_i$ l.a., so auch $(f(v_i))_i$

$$\Downarrow$$

ex. lin. Abhängigkeit $\sum_i r_i v_i = 0$

$$\Downarrow$$

$$0 = f(0) = f\left(\sum_i r_i v_i\right) = \sum_i r_i f(v_i) \leftarrow \text{Das ist eine lin. Abh. der } (f(v_i))_i$$

„$\Rightarrow$": Gleiches Argument mit f^{-1}.

(b) Analog (Übung).

Rest folgt aus (a) und (b). $\square$

Def 4.2.10: Der **Kern** einer lin. Abb. $f: V \to W$ (V, W K-VR) ist

$$\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

Bsp: Sei A die Koeff-Matrix eines homogenen LGS $A\underline{x} = 0$.
Die Lösungsmenge davon ist genau $\ker A$.

Satz 4.2.11: Sei $f: V \to W$ linear (V, W K-VR). Dann gilt:

(a) $\ker f$ ist ein UVR von V.

(b) $\operatorname{im} f$ ist ein UVR von W. ($\{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$)

(c) Für $v, v' \in V$ gilt: $f(v) = f(v') \iff v - v' \in \ker f$.

Insbesondere: f ist injektiv $\iff$ $\ker f = \{0\}$

Bew: (a) z.z.: (i) $0 \in \ker f$

(ii) Sind $v, v' \in \ker f$ und $r \in K$, so ist auch $rv + v' \in \ker f$

(i) $f(0) = 0$ (Übung)

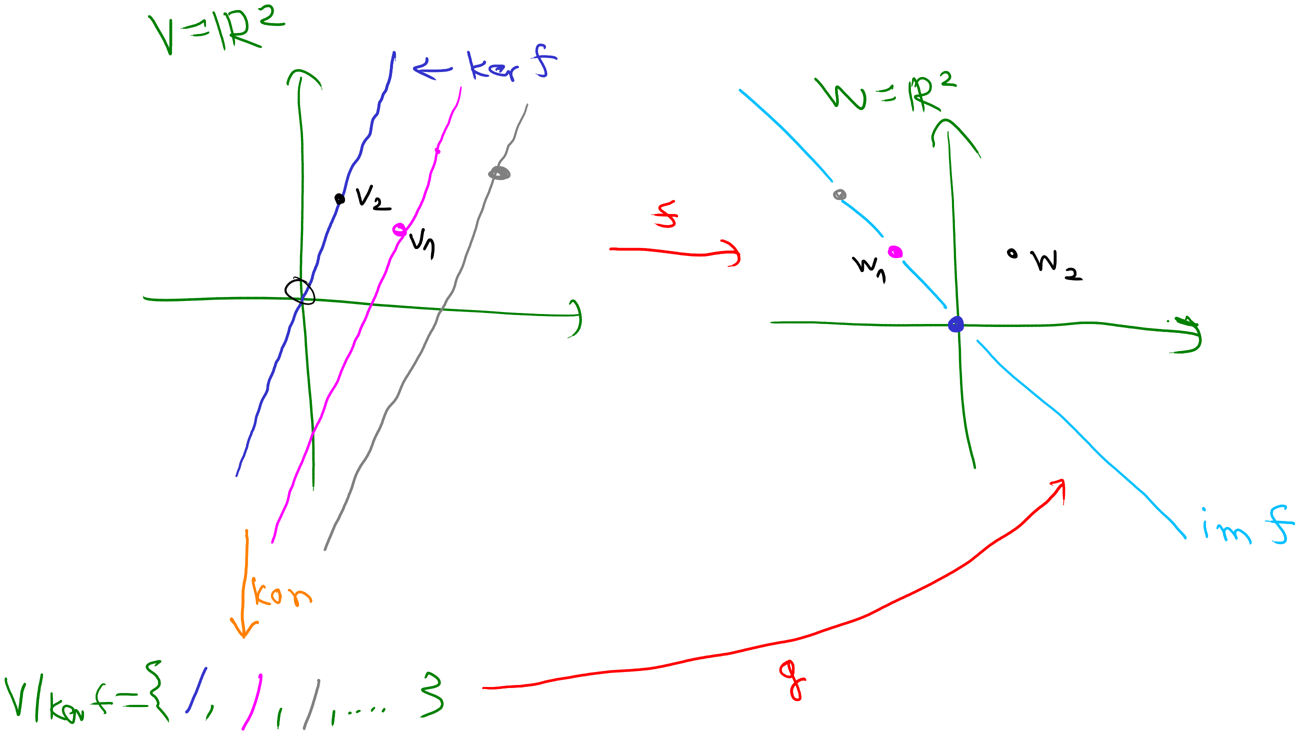
(ii) $v, v' \in \ker f \Rightarrow f(v) = 0,\ f(v') = 0$ $\qquad f(rv + v') \overset{?}{=} 0$

$$f(rv+v') = r \cdot f(v) + f(v') = r \cdot 0 + 0 = 0$$

(b) Übung.

(c) $f(v) = f(v') \iff f(v) - f(v') = 0$

$$f(v) - f(v') = f(v - v') = 0 \iff v - v' \in \ker f \qquad \square$$



<u>Satz 4.2.12 (Homomorphiesatz)</u>: Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ (V, W K-VR), so induziert f einen Isomorphismus $g : V/\ker f \to \operatorname{im} f$, d.h. für alle $v \in V$ gilt:

$$g(\underbrace{\mathrm{kan}(v)}_{\substack{\mathrm{kan}:\, V \to V/\ker f \\ v \mapsto v + (\ker f)}}) = f(v) \qquad (*)$$

<u>Bew</u>: • Für $v, v' \in V$ gilt:

$$f(v) = f(v') \iff v - v' \in \ker f \iff \mathrm{kan}(v) = \mathrm{kan}(v')$$

Das bedeutet: • Eine Abb. $g : V/\ker f \to \operatorname{im} f$, die $(*)$ erfüllt, existiert

• g ist injektiv

• g ist surjektiv nach $\operatorname{im} f$: klar.

• Bleibt z.z.: g linear:

$$g(r \cdot \mathrm{kan}(v) + \mathrm{kan}(v')) \overset{?}{=} r \cdot g(\mathrm{kan}(v)) + g(\mathrm{kan}(v'))$$

da kan linear $\longrightarrow$

$$g(r \cdot \mathrm{kan}(v) + \mathrm{kan}(v')) = g(\mathrm{kan}(rv + v')) = f(rv + v') \underset{\text{da } f \text{ linear}}{=} r \cdot f(v) + f(v') = r \cdot g(\mathrm{kan}(v)) + g(\mathrm{kan}(v'))$$

$\square$

Def 4.2.13: Der Rang einer lin. Abb $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ $\quad$ (V, W K-VR) ist $\operatorname{rk} f := \dim(\operatorname{im} f) = \dim(V/\ker f)$. Der Rang einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist der Rang der entsprechenden Abb. $K^m \to K^n$.

Satz 4.2.14 Sind U, V, W K-VR und $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, so gilt:

(a) $\operatorname{rk} f \leq \min\{\dim U, \dim V\}$

(b) $\dim U = \operatorname{rk} f + \dim(\ker f)$

(c) $\operatorname{rk}(g\circ f) \leq \min\{\operatorname{rk} g, \operatorname{rk} f\}$

(d) $\operatorname{rk}(g\circ f) + \dim V \geq \operatorname{rk}(f) + \operatorname{rk}(g)$

(Sylvesters Rang-Ungleichung)

Notn 0.8: Ist $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, $a_i \in \mathbb{R}$, so bezeichnet $\min M$ das kleinste Element von M und $\max M$ das größte.

Bew: (a) $\operatorname{rk} f = \dim(\operatorname{im} f) \leq \dim V$ $\quad$ da $\operatorname{im} f \subset V$

(hier nur falls alle VR endl-dim)

$\operatorname{rk} f = \dim(U/\ker f) \leq \dim U$

Nach 3.5.8: $\dim U = \dim(\ker f) + \dim(U/\ker f)$

(b) Folgt aus 3.5.8.

(c) $\operatorname{rk}(g\circ f) \overset{?}{\leq} \operatorname{rk} f$

$$\dim U - \dim(\ker g\circ f) \leq \dim U - \dim(\ker f)$$

da $\ker(g\circ f) \supset \ker f$

$\operatorname{rk}(g\circ f) \overset{?}{\leq} \operatorname{rk} g$

$$\dim \operatorname{im}(g\circ f) \leq \dim(\operatorname{im} g)$$

$\operatorname{im}(g\circ f) \subset \operatorname{im} g$

(d) $h := f|_{\ker(g\circ f)}$

$$\dim \ker(g\circ f) = \dim(\underbrace{\ker h}_{=\ker f}) + \dim(\underbrace{\operatorname{im} h}_{\subset \ker g})$$

$$\leq \dim \ker f + \dim(\ker g)$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & V \arrow[r, "g"] & W \\
\ker(g\circ f) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "h"] & \ker g \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & \{0\} \arrow[u, phantom, "\cup"] \\
\ker f \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & \{0\} \arrow[u, phantom, "\cup"] &
\end{tikzcd}$$

Also: $\operatorname{rk}(g\circ f) = \dim U - \dim(\ker g\circ f)$

$$\geq \underbrace{\dim U - \dim(\ker f)}_{\operatorname{rk} f} - \dim \ker g$$

$$\geq \operatorname{rk} f - \dim V + \operatorname{rk} g \qquad \square$$

NR:
$\operatorname{rk} g = \dim V - \dim \ker g$
$\Downarrow$
$\dim \ker g = \dim V - \operatorname{rk} g$

Bem 4.2.15: Seien V, W endl-dim K-VR.
Eine Abb $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ist ein Isomorphismus genau dann wenn $\mathrm{rk} f = \dim W = \dim V$

Satz 4.2.16: Seien V, W endl-dim K-VR und $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Sei $m := \dim V$, $n := \dim W$, $k := \mathrm{rk} f$.
Dann existieren Basen $(v_i)_{i \leq m}$ von V und $(w_j)_{j \leq n}$ von W so dass gilt:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= w_1 \\ &\vdots \\ f(v_k) &= w_k \\ f(v_{k+1}) &= 0 \\ &\vdots \\ f(v_m) &= 0 \end{aligned}$$

Bew: Wähle eine Basis $v_{k+1}, \dots, v_m$ von $\ker f$. $(\dim \ker f = \dim V - \mathrm{rk} f = n - k)$
Ergänze das durch $v_1, \dots, v_k$ zu einer Basis von V.
Im Beweis von 3.5.8 haben wir gesehen: $\mathrm{kan}(v_1), \dots, \mathrm{kan}(v_k)$ bilden eine Basis von $V/\ker f$. Nach 4.2.12 und 4.2.9 ist $\underset{w_1}{\underset{\shortparallel}{f(v_1)}}, \dots, \underset{w_k}{\underset{\shortparallel}{f(v_k)}}$ eine Basis von $\mathrm{im} f$. Ergänze das zu einer Basis von W. $\square$

Korollar 4.2.17: Zu jeder Matrix $A \in K^{m \times n}$ existieren invertierbare Matrizen $S \in K^{m \times m}$ und $T \in K^{n \times n}$, so dass gilt:

$$SAT = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Anzahl der 1en} = \mathrm{rk} A$$

Bew: Wende 4.2.16 auf A an. Erhalte Basis $(v_i)_i$ von K^n und $(w_j)_j$ von K^m s.d.

$$A v_i = \begin{cases} w_i & \text{falls } i \leq \mathrm{rk} A \\ 0 & \text{falls } i > \mathrm{rk} A. \end{cases}$$

Wähle T so, dass $T e_i = v_i$ für $1 \leq i \leq n$
$\shortparallel$

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i.\ \text{Stelle}$$

(Std-Basis von K^n)

(Std-Basis von K^m)

Wähle S so, dass $S w_j = e_j$.

$$\underbrace{S \underbrace{A \underbrace{T e_i}_{v_i}}_{0 \text{ oder } w_i}}_{0 \text{ oder } e_i} = \begin{cases} e_i & \text{falls } i \leq \operatorname{rk} A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also, $SAT = \underbrace{\left(e_1 \,\middle|\, e_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, e_{\operatorname{rk} A} \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0 \right)}_{\text{Matrix mit den } e_i \text{ bzw } \begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix} \text{ als Spalten.}}$

$\square$

<u>Bem. 4.2.18:</u> Ist $A \in K^{m \times n}$ beliebig und sind $S \in K^{m \times m}$ und $T \in K^{n \times n}$ invertierbar, so ist $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(SAT)$.