4 Lineare Abb. und Matrizen

Nachträgliche Korrekturen sind mit einem gelben Balken markiert.

4.1. Matrizen

Sei: K ein Körper.

Def 4.1.1 Seien $m, n \in \mathbb{N}$

(a) Eine $m \times n$-Matrix über K ist ein $m \cdot n$-Tupel

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = (a_{ij})_{ij}$$

(b) Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K wird mit $K^{m \times n}$ bezeichnet. (Dies ist ein K-VR). Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullmatrix.

Def 4.1.2. Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Ist $A = (a_{ij})_{ij} \in K^{l \times m}$ ($1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq m$) und $B = (b_{jk})_{jk} \in K^{m \times n}$ ($1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$), so setzen wir $\underbrace{A \cdot B}_{\text{„Produkt von A und B"}} := (c_{ik})_{ik} \in K^{l \times n}$ mit

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

Bsp: $l = 2$, $m = 3$, $n = 4$

$$A = \begin{array}{c} \scriptstyle i=1 \\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \scriptstyle k=2 \\ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A \cdot B = \begin{array}{c} \scriptstyle i=1,\ k=2 \\ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Wir identifizieren K^n mit $K^{n\times 1}$ („Schreibe Vektoren als Spalten")

Auf diese Art definiere, für $A \in K^{m\times n}$ und $v \in K^n = K^{n\times 1}$

Matrixprodukt von A und v

$$Av \in K^{m\times 1} = K^m$$

<u>Bem:</u> Die Spalten von A sind genau die Bilder der Std-Basis: $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ für

$$v_i = A\cdot e_i = A\cdot \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i\text{. Zeile}$$

<u>Bsp:</u>
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{\in K^{2\times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\in K^3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3\\ 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3\end{pmatrix}}_{\in K^2} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

<u>Bsp 4.1.3</u> Ist $A = (a_{ij})_{ij} \in K^{m\times n}$ und $\underline{b} = (b_i)_i \in K^m = K^{m\times 1}$

Betrachte LGS mit Koeff-Matrix

$$(A \mid \underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$$

Die Gleichungen sind: $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \ldots$

$$A\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n\end{pmatrix}$$

Gleichg in K^m

Das LGS lässt sich jetzt schreiben als $A\cdot \underline{x} = \underline{b}$

<u>Satz 4.1.4:</u> Das Matrixprodukt entspricht der Verknüpfung der entsprechenden Abbildungen:

Sei $A \in K^{l\times m}$, $B \in K^{m\times n}$, $\underline{v} \in K^n$

$$\underbrace{A(\underbrace{B\underline{v}}_{K^m})}_{K^l} = \underbrace{\underbrace{(A\cdot B)}_{K^{l\times n}}\underline{v}}_{K^l}$$

<u>Bew:</u> $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{jk})_{jk}$ $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$

i-ter Eintrag vom Ergebnis ist:

$$\text{Linke Seite}: \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}v_k\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}\cdot v_k$$

$\parallel$

Rechte Seite: $\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}\right)}_{i\text{-te Zeile, } k\text{-te Spalte von } A\cdot B}\cdot v_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} v_k$ $\square$

Skalar-Mult

Satz 4.1.5: Für $A, B \in K^{m\times n}$, $r \in K$, $\underline{v} \in K^n$ gilt:

(a) $(rA)\underline{v} = r\cdot(A\underline{v})$

(b) $(A+B)\underline{v} = A\underline{v} + B\underline{v}$

Bew: (a) Übung.

(b) $A=(a_{ij})_{ij}$ $\quad B=(b_{ij})_{ij}$ $\quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

i-te Eintrag ... von $(A+B)\underline{v}$ ist: $\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})\cdot v_j$

... von $A\underline{v}+B\underline{v}$ ist $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_j$ $\square$

Def 4.1.6 (a) Die Einheitsmatrix in $K^{n\times n}$ ist

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 \\ 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \end{pmatrix}$

(Die entsprechende Abb. $K^n \to K^n$ ist $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto I_n\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, also die Identitätsabbildung.)

(b) Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar, wenn eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ existiert, so dass $A\cdot B = B\cdot A = I_n$ ist. Man nennt B dann das Inverse von A und schreibt A^{-1} dafür.

Satz 4.1.7: Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn die entsprechende Abb $K^n \to K^n$ bijektiv ist. Ist dies der Fall, so entspricht A^{-1} der inversen Abbildung.

Lemma 4.1.8: (a) Sind $A \in K^{l\times m}$, $B \in K^{m\times n}$, $C \in K^{n\times N}$, so gilt $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

(b) Ist $A \in K^{m\times n}$, so ist $I_m \cdot A = A$, $A \cdot I_n = A$

Bew: Das Lemma gilt, da die entsprechenden Aussagen für Abbildungen gelten.

Bew 4.1.7:

Wir nehmen an, A ist invertierbar, d.h. ex A^{-1} mit $A\cdot A^{-1} = I_n = A^{-1}\cdot A$

Für die Abbildungen gilt: $A \circ A^{-1} = I_n = id_{K^n}$

$A^{-1} \circ A = I_n = id_{K^n}$

Abb. zur Matrix

Nach 1.3.9 folgt: A ist bijektiv und A^{-1} ist die inverse Abb.

Bleibt z.z.: Ist die Abb $A: K^n \longrightarrow K^n$ bijektiv, so ist A invertierbar (als Matrix).

Bew. davon später.

Warnung: Für Matrizen gilt nicht immer:
- $A\cdot B = A'\cdot B \Rightarrow A = A'$

  ... selbst dann nicht, wenn $B \neq 0$.
- $AB = B\cdot A$

Korollar 4.1.9 $K^{n\times n}$ ist ein Ring mit komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation. Das 1-Element ist I_n.

Bew: Alle Axiome schon gezeigt außer:

(i) $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

(ii) $(A+B)\cdot C = A C + B\cdot C$

Bew. (i): Wähle $v \in K^n$. Prüfe:

$$\big(A\cdot(B+C)\big)\cdot v \overset{?}{=} (A\cdot B + A\cdot C)\cdot v$$

$$\big(A\cdot(B+C)\big)\cdot v = A\big((B+C)\cdot v\big) = A(Bv + Cv) = ABv + ACv = (A\cdot B + A\cdot C)\cdot v \quad \checkmark$$

(ii): Analog.

$\square$