3.5 Summen- und Quotientenvektorräume

K Kp. V K-VR.

<u>Satz 3.5.1</u>: Sind $U, U' \leq V$ UVR, so ist $\{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$ auch ein UVR von V.

<u>Bew:</u> • $r(u_1 + u_1') + (u_2 + u_2') \overset{?}{\in} \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$ $\qquad r \in K$, $u_1, u_2 \in U$, $u_1', u_2' \in U'$

$$\underbrace{r u_1 + u_2}_{\in U} + \underbrace{r u_1' + u_2'}_{\in U'} \quad \checkmark$$

$0 \in \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$ $\checkmark$ $\qquad\qquad \square$

<u>Def. 3.5.2</u>: Sind $U, U' \leq V$ UVR, so setze $U + U' := \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$

Das nennt man die Summe von U und U'.

<u>Satz 3.5.3</u>: • Sind $U, U' \leq V$ UVR, so gilt: $\dim(U + U') \leq \dim U + \dim U'$.

• Ist $U \cap U' = \{0\}$, so gilt sogar $\dim(U + U') = \dim U + \dim U'$.

<u>Bew:</u> • Wähle Basen $(u_i)_{i \in I}$ und $(u_i')_{i \in I'}$ von U bzw. U'.

• $\langle \{u_i \mid i \in I\} \cup \{u_i' \mid i \in I'\} \rangle_K = U + U'$

Nach 3.4.4 ex. $I_0 \subseteq I$, $I_0' \subseteq I'$ s.d. $(u_i)_{i \in I_0}$, $(u_i')_{i \in I_0'}$ eine Basis von $U + U'$ bilden. $\dim(U + U') = \# I_0 + \# I_0' \leq \underbrace{\# I + \# I'}_{= \dim U + \dim U'}$.

• <u>Beh:</u> Falls $U \cap U' = \{0\}$, ist $(u_i)_{i \in I}$, $(u_i')_{i \in I'}$ l.u. (Daraus folgt die gewünschte Gleichheit.)

<u>Bew. der Beh:</u> Betrachte lin. Komb.

$$\sum_{i \in I} r_i u_i + \sum_{i \in I'} r_i' u_i' = 0$$

zu zeigen: $r_i = 0$, $r_i' = 0$ (für alle i)

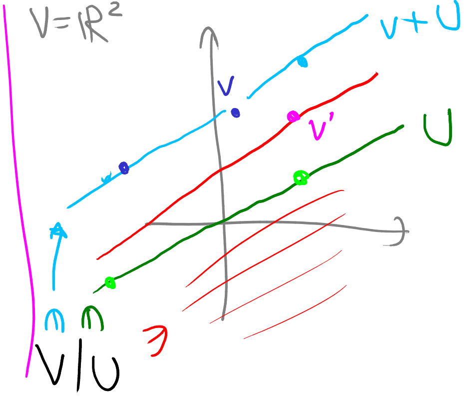
$$\underbrace{\sum_{i \in I} r_i u_i}_{\in U} = \underbrace{- \sum_{i \in I'} r_i' u_i'}_{\in U'} \quad \in U \cap U' = \{0\}$$

Also $\sum_{i \in I} r_i u_i = 0$. Da die u_i l.u. sind, folgt: $r_i = 0$

Analog erhalte $r_i' = 0$. $\qquad \square$

Def 3.5.4: Ist $U \subseteq V$ ein UVR und $v \in V$, so setzen wir $v+U := \{v+u \mid u \in U\}$.
Das nennt man eine Nebenklasse von U.
Die Menge aller Nebenklassen von U wird mit V/U bezeichnet („V modulo U")

$$V/U = \{v+U \mid v \in V\}$$



Bsp. 3.5.5: Die Lsg-Menge eines LGS über K in n Var. ist eine Nebenklasse eines UVR von K^n oder leer.

Satz 3.5.6: Sei $U \subseteq V$ ein UVR. Dann ist V/U ein Vektorraum, mit

$$(v+U)+(v'+U) := (v+v')+U$$

$$r\cdot(v+U) := rv+U$$

für $v, v' \in V$, $r \in K$.

Bew: • Wohldefiniertheit:

• Beh: Für $v_1, v_2 \in V$ gilt: $v_1+U = v_2+U \iff v_1-v_2 \in U$

Bew. der Beh: „$\Rightarrow$" $\underset{\substack{\cap \\ v_1 \in U}}{v_1+0} \in v_2+U$, d.h. $v_1+0 = v_2+u$ für ein $u \in U$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = u \in U$$

„$\Leftarrow$" Sei $v_1+u \in v_1+U$

$$v_1+u = v_1-v_2+v_2+u = v_2+\underbrace{((v_1-v_2)+u)}_{\in U} \in v_2+U$$

Also: $v_1+U \subseteq v_2+U$. „$\supseteq$": analog

• $v+U = (v+u)+U$, $\quad v'+U = (v'+u')+U \qquad u, u' \in U$

$$\overset{?}{\Rightarrow} (v+v')+U \overset{?}{=} ((v+u)+(v'+u'))+U = \Big((v+v')+\underbrace{(u+u')}_{\in U}\Big)+U$$

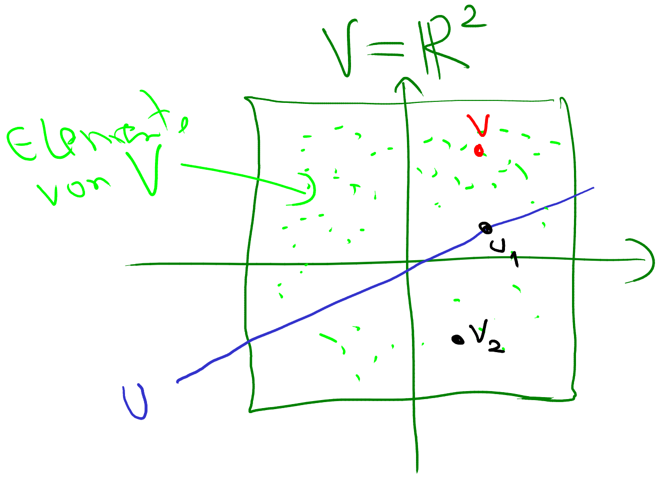
Also „=" nach Beh.

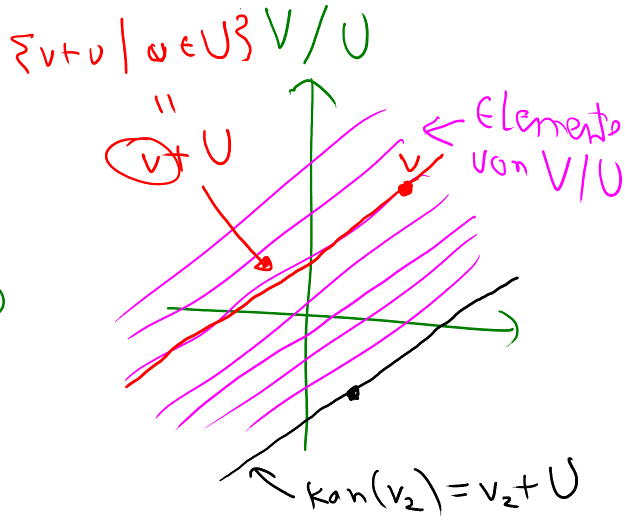
• $r\cdot(v+u)+U = r\cdot v + \underbrace{r\cdot u}_{\in U} + U = r\cdot v + U$

- Vektorraumaxiome von V vererben sich zu V/U.

  Der Nullvektor in V/U ist $0+U=U$

  Das additive Inverse von $v+U$ ist $-v+U$. $\square$





Def 3.5.7: Man nennt V/U einen <u>Quotientenvektorraum</u>. Die Abbildung

$$\text{kan}: V \longrightarrow V/U,\quad v \longmapsto v+U$$

nennt man die <u>kanonische Abb.</u> von V nach V/U.

Satz 3.5.8: Ist $U\subseteq V$ ein UVR, so gilt:

$$\dim V = \dim U + \dim V/U$$

Bew: Wähle eine Basis $(u_i)_{i\in I}$ von U.

Ergänze $(u_i)_i$ durch $(v_j)_{j\in J}$ zu einer Basis von V.

<u>Beh:</u> $(\text{kan}(v_j))_j$ ist eine Basis von V/U.

(Dann fertig: $\dim V = \underset{\dim U}{\underset{\shortparallel}{\#I}} + \underset{\dim V/U}{\underset{\shortparallel}{\#J}}$)

<u>Bew. der Beh:</u>

<u>z.z.:</u> (1) $(\text{kan}(v_j))_j$ erzeugt V/U

(2) $(\text{kan}(v_j))_j$ ist lin. unabh.

(1) Sei $\text{kan}(v)\in V/U$ gegeben. (für $v\in V$)

Habe $v=\sum\limits_{i\in I} r_i u_i + \sum\limits_{j\in J} s_j v_j$ für geeignete $r_i, s_j\in K$

$$\mathrm{kan}(v) = \mathrm{kan}\Big(\underbrace{\sum_i r_i u_i}_{\in U} + \sum_j s_j v_j\Big) = \mathrm{kan}\Big(\sum_j s_j v_j\Big) = \sum_j s_j \,\mathrm{kan}(v_j) \quad \checkmark$$

(2) <u>Ann:</u> $\sum_j s_j \,\mathrm{kan}(v_j) \overset{\text{in } V/U}{=} 0$ für $s_j \in K$

$(\text{z.z: } s_j = 0)$

$$\sum_j s_j \,\mathrm{kan}(v_j) = \mathrm{kan}\Big(\sum_j s_j v_j\Big), \qquad 0 = \mathrm{kan}(0) = U$$

$$\Longleftrightarrow \sum_j s_j v_j \in U$$

$$\Rightarrow \sum_j s_j v_j - \sum_i r_i u_i = 0 \text{ für geeignete } r_i \in K$$

Da $(u_i)_i, (v_j)_j$ l.u. folgt: Alle $s_j = 0$ und alle $r_i = 0$.

$\square$